Notas de Análisis Complejo

G.A. Raggio [1]

2^{do} Cuatrimestre 1998

[1] Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.

Las notas que siguen surgen del curso de Análsis Complejo dictado en el segundo cuatrimestre de 1998 en FAMAF como parte de la materia *Análisis IV* de las Licenciaturas en Física y Astronomía y como materia *Elementos de Funciones Complejas* del Profesorado en Matemática.

El curso se basó en el libro de Churchill & Brown (*Variable Compleja y Aplicaciones*, McGraw-Hill, 1992; traducción de la quinta edición de "Complex Variables and Applications" de los mismos autores en la misma editorial) pero he usado constantemente la presentación ofrecida en el libro de Saff & Snider (*Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice-Hall, 1993) que considero excelente y, por supuesto, el magnifico libro de Ahlfors (*Complex Analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, Mc-Graw-Hill, 1966, segunda edición) del cual aprendí estos asuntos hace ya mucho. La sucesión temática de las notas tiene poco que ver con el curso dictado. Los motivos de este desfasaje son dos: la función exponencial, y el Teorema de Cauchy-Goursat.

En el curso, la función exponencial fué introducida "a mano" apelando a la buena voluntad y a los conocimientos previos de los alumnos. Aquí anteponemos la discusión de las series de potencia que permite una introducción límpida de exp. Y ya que estamos demostramos que las series de potencias y sus derivadas son analítica s.

En cualquier curso elemental la discusión del Teorema de Cauchy-Goursat presenta un problema serio. Este resultado crucial no puede demostrarse sin usar compacidad. Es notable que los alumnos del curso no tenian ninguna familiaridad con este concepto. En la demostración ofrecida por Churchill & Brown, la compacidad no se menciona explicitamente pero está escondida (y relegada a un ejercicio) en la construcción de un retículo de cuadrados que cubre apropiadamente la región de la acción. Hemos optado por ser mas explicitos y menos generales. Introducimos compacidad y demostramos el Teorema de Cauchy-Goursat solo para un disco siguiendo la presentación de Ahlfors.

En el curso, los fenómenos asociados con caminos cerrados no simples se mencionaron muy succintamente o para nada. Aqui agregamos un apéndice con una discusión de "winding numbers".

El lector encontará aqui solo algunas pocas "aplicaciones" y ninguna concreta a la física. Como solía decir el Profesor Res Jost: "Verallgemeinerungen und Anwendungen folgen automatisch" (Generalizaciones y aplicaciones siguen automaticamente).

Mi agradecimiento a Roberto Miatello y a Patricia Kisbye por lo mucho que me enseñaron sobre el Análisis Complejo en el diario trajinar con los prácticos y los exámenes.

Córdoba, Marzo de 1999 Guido A. Raggio

Índice Temático

1 Números complejos **3**
- 1.1 ¿Que son? . . . 3
- 1.2 Complejo conjugado y módulo . . . 6
- 1.3 Desigualdades básicas para el módulo . . . 6
- 1.4 Representación polar; el argumento de un número complejo . . . 7
- 1.5 Potencias enteras y racionales . . . 9
- 1.6 Conjuntos de números complejos . . . 10
  - 1.6.1 Entornos . . . 10
  - 1.6.2 Puntos de acumulación; Teorema de Bolzano-Weierstarß . . . 11
  - 1.6.3 Conjuntos abiertos y cerrados . . . 11
  - 1.6.4 Conjuntos conexos . . . 11
  - 1.6.5 Conjuntos acotados . . . 11
- 1.7 Límites . . . 11
- 1.8 Conjuntos compactos . . . 12

2 Funciones **15**
- 2.1 Funciones sobre los complejos . . . 15
- 2.2 Continuidad y consecuencias . . . 15
  - 2.2.1 Ejemplos . . . 15
- 2.3 Convergencias de sucesiones de funciones . . . 16
- 2.4 La derivada . . . 17
- 2.5 Analiticidad; ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . 18
- 2.6 Funciones armónicas . . . 19

3 Series de potencias **21**
- 3.1 Series . . . 21
- 3.2 Series de potencias . . . 23
- 3.3 Analiticidad de la suma de una serie de potencias . . . 25

4 La función exponencial y sus amigas **27**
- 4.1 La exponencial; funciones "trigonométricas" e "hiperbólicas" complejas . . . 27
- 4.2 La inversa de la exponencial: el logaritmo . . . 28
- 4.3 Potencias arbitrarias . . . 28

5 Transformaciones de Möbius **31**

6 Integración de funciones complejas **35**
- 6.1 Integración de funciones a valores complejos sobre los reales . . . 35
- 6.2 Caminos . . . 36
- 6.3 Integración compleja . . . 37
- 6.4 Primitivas . . . 39

7 Teoremas de Cauchy-Goursat y Fórmula de Cauchy **43**
- 7.1 Teoremas de Cauchy-Goursat . . . 43
- 7.2 La representación integral de Cauchy . . . 47
- 7.3 Teorema de Morera . . . 49
- 7.4 Ramas del logaritmo y de las potencias . . . 49

8 Series de potencia II **51**
- 8.1 Serie de Taylor para funciones analíticas . . . 51
- 8.2 Series de Laurent . . . 52

9 Algunos Resultados Fundamentales **55**
9.1 Analiticidad de límites uniformes 55
9.2 Teorema de Liouville 55
9.2.1 Aplicación: Teorema Fundamental del Álgebra 55
9.3 El Principio del Módulo Máximo 56
9.4 Ceros 56
9.5 Singularidades de funciones analíticas 57
9.6 El Principio del Argumento 59
9.6.1 Teorema de Rouché-Glicksberg 59

10 Residuos **61**

A Caminos cerrados en general. El contador de vueltas **71**

1

Números complejos

1.1 ¿Que son?

En general un polinomio en una variable real x

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

no tiene porque tener raices reales, i.e. soluciones de la ecuación $P(x) = 0$. Si x_1 es una raiz entonces $P(x) = (x - x_1)Q(x)$ donde Q es un polinomio de grado menor. La existencia de raices permite entonces factorizar polinomios cosa que simplifica su análisis. El polinomio más simple que no admite raices reales es

$$x^2 + 1 \ , \tag{1.1}$$

ya que el cuadrado de un número real es siempre un número no-negativo.

A partir de estas y otras consideraciones surge la idea (la necesidad, el capricho, ...) de extender los números reales a un conjunto más rico y poderoso. La extensión más pequeña (en un sentido matematicamente preciso) resulta ser el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. Al físico a quien no le convenzen estas elucubraciones le diría que tenga muy en cuenta que la mecánica cuántica es una teoría genuinamente compleja. Y no es atrevido conjeturar que no hubiese sido descubierta sin los complejos. También le recordaría, a otro nivel, la enorme simplificación y economía que se produce al introducir los números complejos en el análisis de fenómenos oscilatorios, o la impedancia compleja en el análisis de circuitos de corriente.

La extensión que se busca deberá –si se quiere por ejemplo atacar el problema de la factorización de polinomios– permitir una suma y una multiplicación que tengan las mismas propiedades que estas operaciones para los reales.

Considere un número imaginario i, llamado **unidad imaginaria** , que multiplicado por si mismo de -1: $ii = i^2 = -1$. i es entonces, por decreto, una raiz del polinomio (1.1). Si queremos, como dijimos, preservar las reglas de cálculo usuales, obtenemos inmediatamente otra raiz $-i$ ya que $(-i)(-i) = (-)(-)i^2 = -1$. Si multiplicamos a i por un número real b, $ib = bi$, hemos obtenido una raiz del polinomio $x^2 + b^2$. El conjunto de los números ib con b real arbitrario forma el conjunto de los números **imaginarios**. La suma de dos imaginarios es $(ib_1) + (ib_2) = i(b_1 + b_2)$. Al multiplicar dos imaginarios, sin innovar y usando solamente la propiedad definitoria de i, obtenemos $(ib_1)(ib_2) = i^2 b_1 b_2 = -b_1 b_2$ o sea un número real. Si ahora sumamos un número real a y un número imaginario ib obtenemos $a + ib$ que denominamos **número complejo**. La **parte real**

$$\Re(a + ib) = a \ ,$$

de $a + ib$ es el número real a, y su **parte imaginaria**

$$\Im(a + ib) = b \ ,$$

es el número real b, Conservando siempre el principio de no innovar, la suma de dos complejos será

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + ib_1 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \ .$$

En cuanto a la multiplicación de complejos, podemos proceder cautelosamente. Primero, conservando distributividad,

$$a(a_1 + ib_2) = aa_1 + iab_1 \ , \quad \text{para } a \text{ es real}$$

$$(ib)(a_1 + ib_1) = iba_1 + i^2 bb_1 = -bb_1 + iba_1 \ , \quad \text{para } ib \text{ imaginario} \ .$$

Combinando estas reglas y siempre queriendo distributividad tendremos

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ib_1 a_2 + ia_1 b_2 + i^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \ .$$

El conjunto $\mathbb{C}$ formado por $a + ib$ donde a y b son reales con la suma y multiplicación recien establecidas conforman los números complejos.

Ejercicio 1 *Verifique la suma y multiplicación de $\mathbb{C}$ tiene todas las propiedades usuales de estas operaciones en los reales (Conmutatividad, Asociatividad, Distributividad, ...).*

Verifique que el conjunto $\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ de pares ordenados de números reales con:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1+y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

puede identificarse con $\mathbb{C}$ y sus operaciones via la identificación $(x,y)\equiv x+iy$. Observe que $(0,1)\equiv i$.

Anotaremos los números complejos con letras latinas en minúscula $(z,w,\cdots)$ y cuando escribimos $z=x+iy$ sobreentendemos que x e y son reales.

El hecho que un complejo $z=x+iy$ este determinado por un par ordenado (x,y) de números reales nos permite identificar a $\mathbb{C}$ con el plano real.

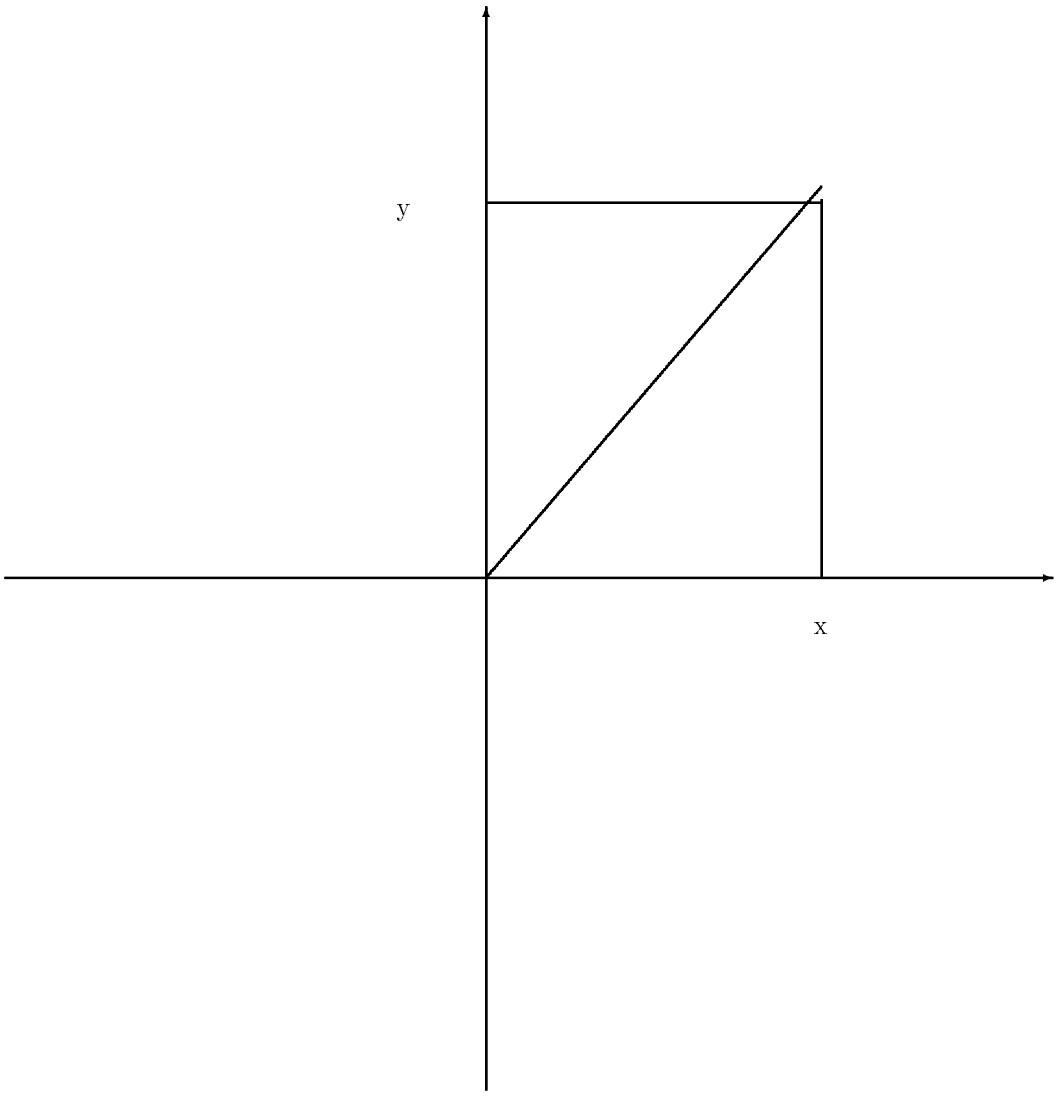


Figura 1.1: Representación de un complejo en el plano $\mathbb{R}^2$

Esta identificación es una rica fuente que debe tenerse muy presente. Asi, por ejemplo, la suma de los complejos $z_1=x_1+iy_1$ y $z_2=x_2+iy_2$ se transforma en el plano en la suma de los vectores (x_1,y_1) y (x_2,y_2) (ver figura 2).

Veremos luego que la multiplicación también tiene un correlato geométrico.

El **inverso** de un número complejo $z=x+iy$ no nulo (i.e., $\Re(z)$ y $\Im(z)$ no son ambos nulos) es el número complejo anotado z^{-1} o $1/z$ dado por

$$z^{-1}z=1\ ;$$

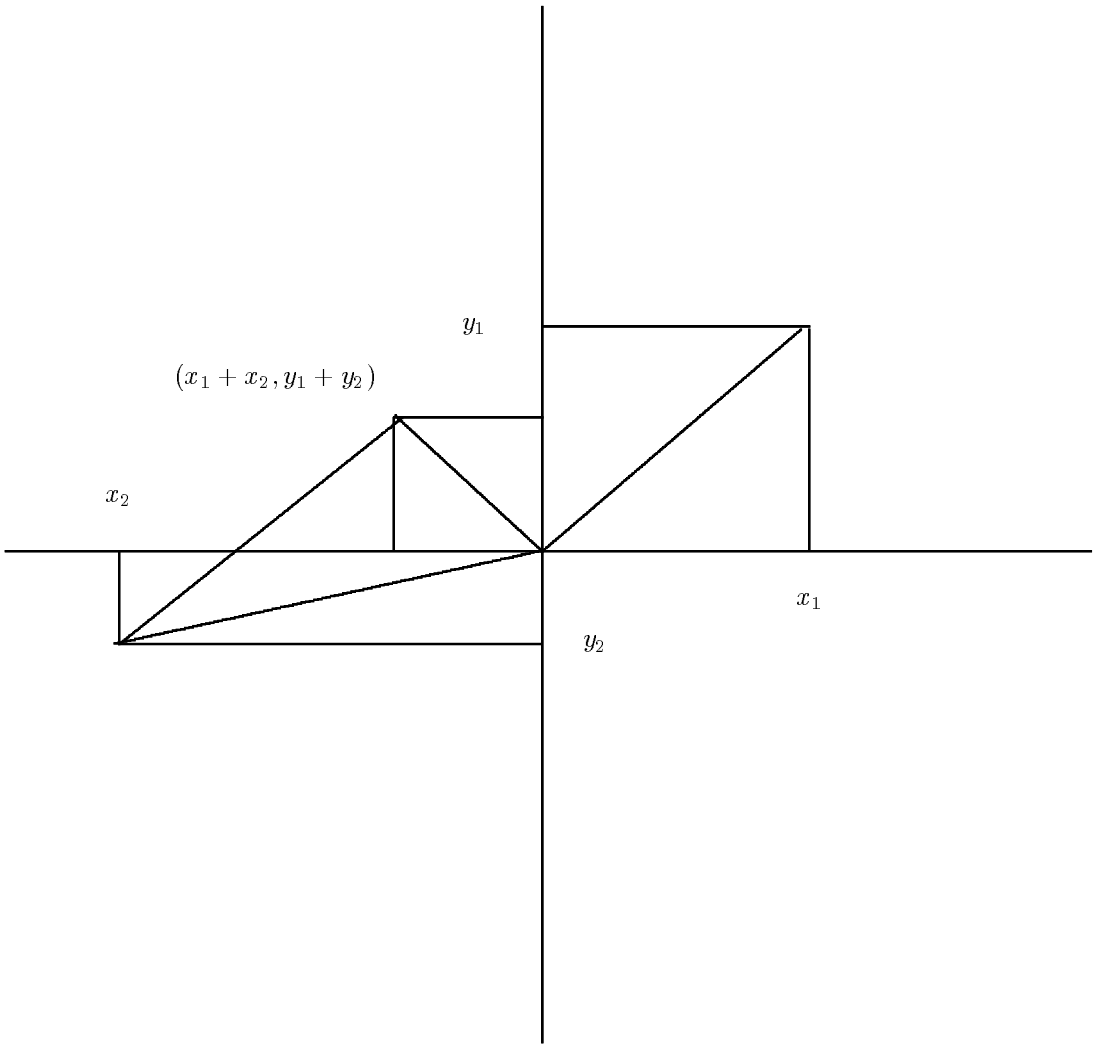


Figura 1.2: La suma de complejos

con $z = x+iy$ y $z^{-1} = a+ib$ obtenemos $(a+ib)(x+iy) = (ax-by)+i(ay+xb) = 1$ o sea que $a = x/(x^2+y^2)$, y $b = -y/(x^2+y^2)$, con lo que

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \, .$$

Esto nos permite dividir números complejos cuando el numerador no se anula

$$z_1/z_2 = \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \, , \;\; z_2 \neq 0 \, ;$$

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \, , \;\; (x_2,y_2) \neq (0,0) \, .$$

1.2 Complejo conjugado y módulo

Conviene introducir el **complejo conjugado** $\overline{z}$ del complejo $z = x+iy$ por

$$\overline{z} = x - iy = \Re(z) - i\Im(z)$$

que se obtiene cambiandole el signo a la parte imaginaria de z (o sea, reflejando en el eje imaginario). Las siguientes relaciones son inmediatas

$$\Re(z) = (z+\overline{z})/2 \, , \;\; \Im(z) = (z-\overline{z})/(2i) = i(\overline{z}-z)/2 \, .$$

Es inmediato que $z\overline{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$ es el cuadrado de la distancia del punto (x,y) al origen. Se llama **módulo** del número complejo $z = x+iy$ al número no-negativo

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\overline{z}} \, ,$$

o sea la distancia al origen en el plano complejo. Observese que $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Tanto el módulo como el conjugado son sumamente utiles para realizar operaciones algebraicas con complejos. Por ejemplo, se tiene

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \, , \;\; z \neq 0 \, ,$$

$$z_1/z_2 = z_1\overline{z_2}/|z_2|^2 \, , \;\; z_2 \neq 0 \, .$$

1.3 Desigualdades básicas para el módulo

Lema 1.1 *Para todo complejo z se tiene*

$$-|z| \leq \Re(z) \leq |z| \;\; , \;\; -|z| \leq \Im(z) \leq |z| \, , \tag{1.2}$$

$$|\overline{z}| = |z| \, . \tag{1.3}$$

Para todo par de complejos z y w se tiene

$$|zw| = |z|\,|w| \, . \tag{1.4}$$

Demostración: De $|z|^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2 \geq \max\{\Re(z)^2, \Im(z)^2\}$ se obtienen las desigualdades (1.2). Como $\Im(\overline{z}) = -\Im(z)$ se sigue (1.3). Por último

$$|zw|^2 = \Re(zw)^2 + \Im(zw)^2 = \left(\Re(z)\Re(w) - \Im(z)\Im(w)\right)^2 + \left(\Re(z)\Im(w) + \Im(z)\Re(w)\right)^2$$

$$= \Re(z)^2\Re(w)^2 + \Im(z)^2\Im(w)^2 + \Re(z)^2\Im(w)^2 + \Re(w)^2\Im(z)^2 = |z|^2\,|w|^2 \, . \boxed{\text{XX}}$$

Las siguientes desigualdades son básica y se usarán constantemente en el curso:

Lema 1.2 *Para todo par de complejos z_1, z_2, se tiene:*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \, ;$$

en particular

$$|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)| \, .$$

Demostración:

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\overline{z_1} \pm \overline{z_2}) = |z_1|^2 \pm (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + |z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\Re(z_1\overline{z_2}) \ .$$

Con (1.2), (1.3), y (1.4), $\pm\Re(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1|\,|z_2|$, luego

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\Re(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \ ,$$

y la desigualdad de la derecha se obtiene tomando la raiz cuadrada.

Con las mismas relaciones, $\pm\Re(z_1\overline{z_2}) \geq -|z_1\overline{z_2}| = -|z_1|\,|z_2|$, luego

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\Re(z_1\overline{z_2}) \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| - |z_2|)^2 \ ,$$

y la desigualdad de la izquierda se obtiene tomando la raiz cuadrada.

Luego, $|z| \leq |\Re(z)| + |i\Im(z)| = |\Re(z)| + |i|\,|\Im(z)| = |\Re(z)| + |\Im(z)|$. XX

Ejercicio 2 *Interprete geométricamente la desigualdad* $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ *que se denomina* **desigualdad del triángulo.**

1.4 Representación polar; el argumento de un número complejo

El hecho que un número complejo es un punto en el plano $\mathbb{R}^2$ sugiere que se lo puede caracterizar por medio de la distancia al origen y un ángulo apropiado; se obtiene asi la **representación polar**. Si $z = x + iy$, la distancia la origen es como vimos $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Cualquier ángulo α que cumpla con

$$x = \Re(z) = |z|\cos(\alpha) \ , \quad y = \Im(z) = |z|\sin(\alpha) \tag{1.5}$$

se llama **argumento** de z [1].

Siempre hay infinitos argumentos: si $z = 0$ las ecuaciones no imponen ninguna condición sobre α; si $z \neq 0$ entonces hay al menos un argumento[2] α_o de z y entonces, ya que tanto cos como sin son funciones periódicas de período 2π, también $\alpha_o + 2k\pi$ es un argumento de z para todo número entero $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$. Además, estos son todos los argumentos, i.e. dos argumentos de un complejo z no-nulo se diferencian por un multiplo entero de 2π. En efecto, si α_1 y α_2 son dos argumentos de $z \neq 0$, entonces

$$\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha_2) \ , \quad \sin(\alpha_1) = \sin(\alpha_2)$$

y esto implica que $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi$ para algún entero k.

Se anotara $\arg(z)$ al conjunto (infinito) de argumentos de z. ¡Atención: arg **no es una función**! Observe que $\arg(0) = \mathbb{R}$. La representación polar suele ser muy útil, por ejemplo para multiplicar: si $\alpha_1 \in \arg(z_1)$ y $\alpha_2 \in \arg(z_2)$, entonces usando los teoremas de adición de las funciones trigonométricas,

$$\Re(z_1z_2) = \Re(z_1)\Re(z_2) - \Im(z_1)\Im(z_2) = |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)) = |z_1|\,|z_2|\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \ ;$$

$$\Im(z_1z_2) = \Im(z_1)\Re(z_2) + \Im(z_2)\Re(z_2) = |z_1|\,|z_2|\,(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1)) = |z_1|\,|z_2|\sin(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Luego, $\alpha_1 + \alpha_2 \in \arg(z_1z_2)$. El producto se obtiene entonces multiplicando los módulos y sumando los argumentos.

La construcción geométrica del producto es la de la Figura 3. Observe que los triangulos de vértices $0, z_1, 1$ y $0, z_2, z_1z_2$ son similares; el producto se puede construir con regla y compás.

Se tiene entonces la relación

$$\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{1.6}$$

entendida como "la suma de cualquiera de los argumentos de los factores es un argumento del producto".

Ejercicio 3 *En el mismo sentido, se tiene*

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ \ , y \ \ \arg(1/z) = -arg(z) \ \textit{para} \ z \neq 0 \ .$$

[1] Es frecuente la afirmación de que α está determinado por la ecuación $\tan(\alpha) = y/x$; esto no es enteramente correcto. La tangente es de período π con lo que la condición admite dos soluciones en todo intervalo de largo 2π. Si α es una solución también lo es $\alpha + \pi$ y como $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$ solo uno de estos dos números satisface (1.5).

[2] $x/|z|$ y $y/|z|$ son números reales de módulo menor o igual a 1 y sus cuadrados se suman a 1.

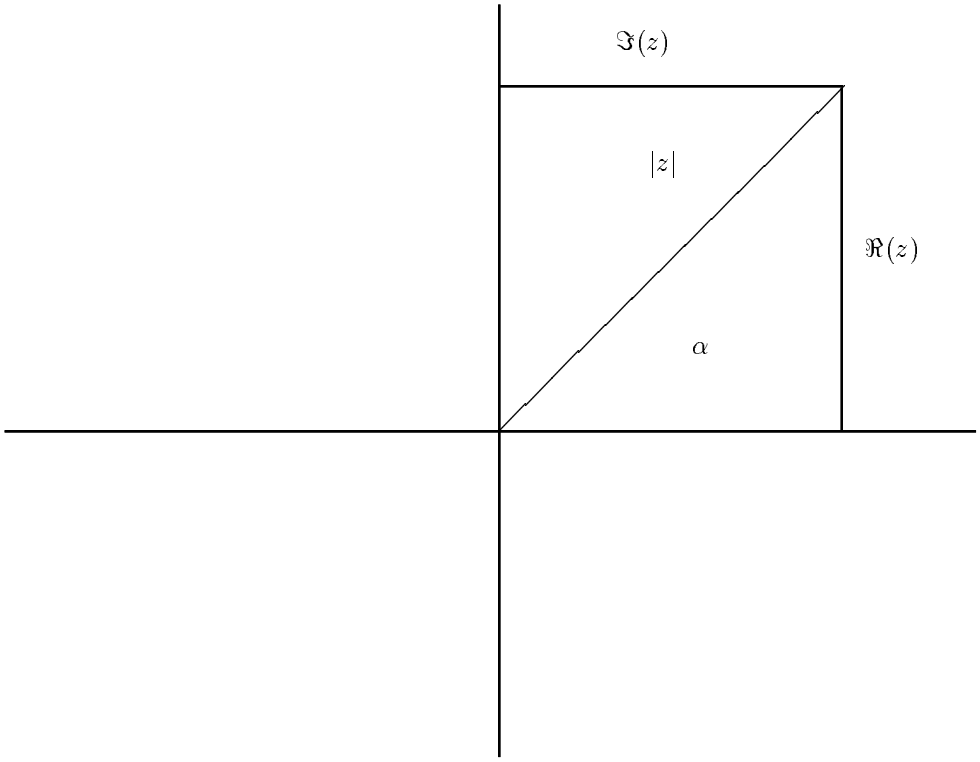


Figura 1.3: El argumento

Es inmediato ver (verifiquelo) que en cada intervalo de la forma $(a, a+2\pi]$, donde a es un número real arbitrario, hay un único argumento de un complejo no-nulo; este número se anota $\arg_a(z)$. Esto define una función $0 \neq z \mapsto \arg_a(z)$ que, como veremos más adelante, resulta ser continua salvo sobre la semirecta que nace en 0 y forma el ángulo a con el semieje real positivo. Esto resulta del hecho que un punto sobre esta recta tiene a $a+2\pi$ como argumento mientras que hay puntos muy cercanos que tienen argumentos $a+\epsilon$ con $\epsilon > 0$ tan chico como se quiera.

El **argumento principal** es el único argumento en el intervalo $(-\pi, \pi]$ y se anotará $\mathrm{Arg}(z) = \arg_{-\pi}(z)$.

Aunque aun no disponemos de la función exponencial para los complejos, adelantamos que para cualquier número real α se tiene

$$\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\,.$$

Esto permite escribir la representación polar de un complejo no-nulo z como

$$\boxed{z = |z|\exp(i\alpha)\ ,\ \alpha \in \arg(z)} \quad ; \tag{1.7}$$

esta relación junto con la relación

$$\boxed{\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)} \tag{1.8}$$

– que es familiar de la función exponencial real – facilita enormemente los cálculos algebraicos en la representación polar.

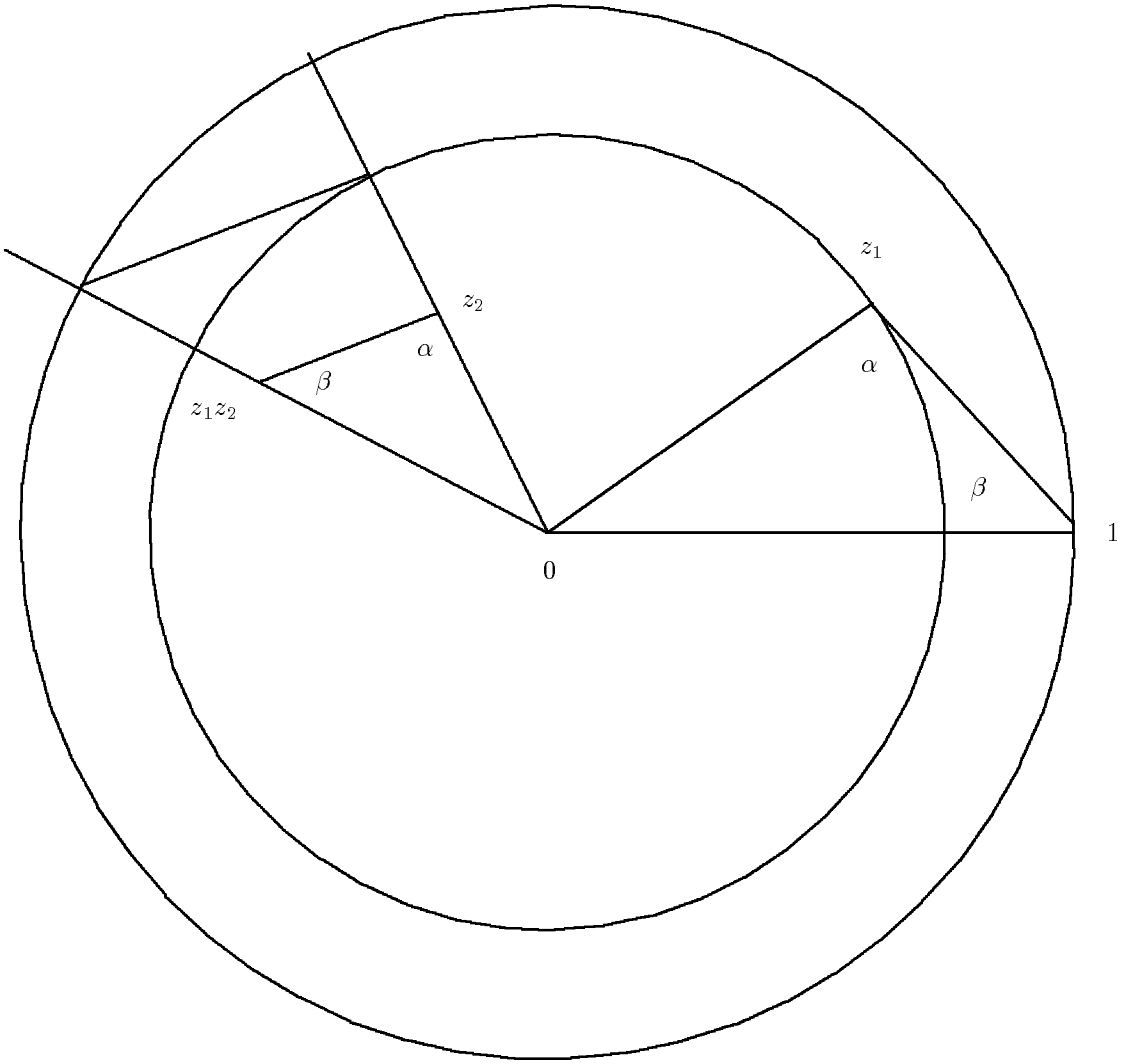


Figura 1.4: El producto de complejos

1.5 Potencias enteras y racionales

Si p es un número entero no nulo ($p = \pm 1, \pm 2, \cdots$) la definición de z^p es inequivoca:

$$z^p = \begin{cases} \overbrace{z \cdot z \cdots z}^{p \text{ veces}} & , \quad \text{si } p > 0 \\ \underbrace{z^{-1} \cdot z^{-1} \cdots z^{-1}}_{p \text{ veces}} & , \quad \text{si } p < 0 \text{ y } z \neq 0 \end{cases} .$$

La definición de la q-ésima raiz $z^{1/q}$ de un número complejo es menos directa. Dado $q \in \mathbb{N}$ con $q \geq 2$ y $z \in \mathbb{C}$ buscamos un número complejo w (la q-ésima raiz de z) tal que

$$w^q = z \ .$$

Debemos tener que el módulo de w^q es igual al módulo de z o sea,

$$|w^q| = |w|^q = |z| \ ,$$

esto determina univocamente al módulo de w como la q-ésima raiz positiva del número $|z|$. Si $\alpha \in \arg(w)$ obtenemos con (1.6)

$$\underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{q \text{ veces}} = \arg(z) \ .$$

Si $\beta \in \arg(z)$ debemos tener

$$q\alpha = \beta + 2\pi m \quad , \quad \text{con } m \text{ entero arbitrario} \ .$$

Luego,

$$\alpha = \frac{\beta}{q} + \frac{2\pi m}{q} .$$

Cuando m recorre los enteros ¿cuantos argumentos distintos obtenemos? Los números

$$\alpha_m = \frac{\beta}{q} + \frac{2\pi m}{q}$$

para $m = 0, 1, \cdots, q-1$ toman los valores

$$\alpha_0 = \frac{\beta}{q} , \quad \alpha_1 = \frac{\beta + 2\pi}{q} , \quad \cdots \alpha_{q-1} = \frac{\beta + 2\pi(q-1)}{q}$$

que además de ser todos distintos tienen la propiedad de que la diferencia de cualquier par de ellos no es un multiplo entero de 2π (pues $q \geq 2$). Por lo tanto estos q números conducen a q argumentos distintos. Veamos ahora que para cualquier otro entero m distinto de $0, 1, \cdots$, y $q-1$ se tiene que $\alpha_m - \alpha_j$ es un múltiplo entero de 2π para algún $j \in \{0, 1, 2, \cdots, q-1\}$. En efecto, cualquier entero $m \notin \{0, 1, \cdots, q-1\}$ puede escribirse como $m = nq + j$ donde n es un entero y $j \in \{0, 1, 2, \cdots, q-1\}$, luego

$$\alpha_m = \alpha_{nq+j} = \frac{\beta}{q} + \frac{2\pi(nq+j)}{q} = \alpha_j + n2\pi .$$

Estos m no conducen a nuevos argumentos. Esto demuestra el siguiente resultado

Lema 1.3 *Para todo complejo z no-nulo y todo natural q mayor o igual a 1 existen exactamente q números complejos w_k distintos ($k = 0, 1, 2, \cdots, q-1$) tales que*

$$w_k^q = z ;$$

estos números son

$$|w_k| = \sqrt[q]{|z|} , \quad \arg(w_k) = \frac{\arg(z) + 2k\pi}{q} , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, q-1 .$$

La única q-ésima raiz de 0 es 0.

Hemos conseguido encontrar todas las q-ésimas raices de z. Nuevamente, $z^{1/q}$ no es una función sino un conjunto de q números complejos distintos.

Es obvio como definir las raices negativas: $z^{-1/q} = (1/z)^{1/q}$ para $z \neq 0$. También conviene convenir que $z^0 = 1$. Con esto, definimos las potencias racionales como (p es un entero arbitario, y q es un entero arbitrario no nulo):

$$z^{p/q} = (z^p)^{1/q}$$

donde se supone que $z \neq 0$ si $q \neq \pm 1$.

Ejercicio 4 *Convenzase que valen la reglas usuales: $z^{p_1/q_1} z^{p_2/q_2} = z^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}$ y $(z^{p_1/q_1})^{p_2/q_2} = z^{p_1 p_2/(q_1 q_2)}$.*

1.6 Conjuntos de números complejos

1.6.1 Entornos

Dado un número complejo z_o y $r > 0$ llamamos:

1. **disco abierto de radio r alrededor de z_o** al conjunto

$$D(z_o; r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_o| < r\} ;$$

2. **disco cerrado de radio r alrededor de z_o** al conjunto

$$\overline{D(z_o; r)} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_o| \leq r\} ;$$

3. **disco abierto pinchado de radio r alrededor de z_o** al conjunto

$$D_o(z_o; r) = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z - z_o| < r\} .$$

Se llama **entorno** de un punto $z \in \mathbb{C}$ a cualquier disco abierto alrededor de z. Cuando se quiere especificar el radio del disco se habla de r**-entorno**.

Dado un conjunto de números complejos $S \subset \mathbb{C}$, decimos que $z \in S$ es un **punto interior de** S si existe algún entorno de z contenido en S. Un punto $z \in S$ se denomina **punto de frontera de** S si todo entorno de z contiene (a lo menos) un punto de S y (a lo menos) un punto que no pertenece a S. El **borde** o **frontera** de S es el conjunto de sus puntos de frontera.

Ejercicio 5 *Determine los puntos interiores y de frontera de un disco abierto, de un disco cerrado, de un disco abierto pinchado y de los conjuntos discreto* $\{1/n : n = 1, 2, 3, \cdots\}$ *y* $\{1/n : n = 1, 2, 3, \cdots\} \cup \{0\}$.

¿Cual es la frontera de $\mathbb{C}$*?*

1.6.2 Puntos de acumulación; Teorema de Bolzano-Weierstarß

$z \in \mathbb{C}$ es un **punto de acumulación** del conjunto $S \subset \mathbb{C}$ si todo entorno de z contiene infinitos puntos de S; equivalentemente, si todo disco abierto pinchado alrededor de z contiene (a lo menos) un punto de S.

Ejercicio 6 *¿Cuales son los puntos de acumulación de* $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} \cup \{i\} \cup \{-2\}$*?*

¿Cuales son los puntos de acumulación de los conjuntos del ejercicio anterior?

Verifique que $S \subset \mathbb{C}$ *es cerrado si contiene sus puntos de acumulación.*

Uno de los resultados fundamentales del análisis real es el siguiente

Teorema 1.1 *(Teorema de Bolzano-Weierstraß) Todo conjunto infinito de números reales acotados tiene un punto de acumulación real.*

1.6.3 Conjuntos abiertos y cerrados

El conjunto S se dice **abierto** si todos sus puntos son interiores. El conjunto S es **cerrado** si contiene a su frontera (equivalentemente, si $\mathbb{C} \setminus S$ es abierto). El **cierre** de S es la unión de S y su frontera.

Ejercicio 7 *Convenzase que* $\emptyset$ *y* $\mathbb{C}$ *son conjuntos abiertos y cerrados a la vez.*

Verifique que si un conjunto no tiene puntos de frontera entonces es abierto.

1.6.4 Conjuntos conexos

Dados dos complejos distintos z_1 y z_2 llamamos $[z_1, z_2]$ al segmento de recta que une a estos puntos: $[z_1, z_2] = \{tz_2 + (1-t)z_2 : 0 \leq t \leq 1\}$.

Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice **conexo** si dado cualquier par de puntos distintos z_1, z_2 en S existen finitos puntos $z_1 = w_0, w_1, w_2, \cdots w_n = z_2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ tales que los n segmentos de recta $[w_k, w_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ pertenecen a S. O sea, cualquier par de puntos de S puede unirse por medio de una poligonal que no sale de S.

Ejercicio 8 *Demuestre que* $S \subset \mathbb{C}$ *es conexo si y solo si no existen dos subconjuntos abiertos no vacios* S_1, S_2 *de* $\mathbb{C}$ *tales que* $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ *y* $S = S_1 \cup S_2$.

Un **dominio** es cualquier conjunto abierto y conexo.

1.6.5 Conjuntos acotados

Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice acotado si está contenido en algún disco; equivalentemente, si existe $R > 0$ tal que $|z| \leq R$ para todo $z \in S$.

1.7 Límites

Decimos que una sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de números complejos z_n **converge** a $z \in \mathbb{C}$ si

$$\lim_{n \to \infty} |z - z_n| = 0 \, . \tag{1.9}$$

En tal caso, z es el **límite** de la sucesión y decimos que la sucesión es **convergente**; también se escribimos $z_n \to z$.

Recuerde que $\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0$ significa precisamente que dado $\epsilon > 0$ existe n_o tal que $|z - z_n| \leq \epsilon$ para $n \geq n_o$. Luego

Lema 1.4 *Si $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de complejos entonces las condiciones*

1. *$z_n \to z$;*
2. *Para todo entorno E de z existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in E$ cuando $n \geq n_o$;*

son equivalentes.

Una aplicación de las relaciones (1.2)-(1.4) y del Lema 1.2 produce inmediatamente el siguiente resultado:

Lema 1.5 *$z_n \to z$ si y solo si $\overline{z_n} \to \overline{z}$ si y solo si $\Re(z_n) \to \Re(z)$ y $\Im(z_n) \to \Im(z)$.*

Ejercicio 9 *Demuestre*

Lema 1.6 *Si $z_n \to z$ entonces $|z_n| \to |z|$.*

y convenzase que $|z_n| \to |z|$ no implica que $z_n \to z$.

Decimos que una sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de complejos es una **sucesión de Cauchy** si dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_m| \leq \epsilon$ para $n \geq n_o$ y $m \geq 0$. Como en el caso de los reales (propiedad de "completitud"),

Proposición 1.1 *Una sucesión de complejos converge si y solo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración: Reducimos la demostración a la del caso real que no repetimos aquí.
$\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge si y solo si existe $z \in \mathbb{C}$ con $z_n \to z$, si y solo si $\Re(z_n) \to \Re(z)$ y $\Im(z_n) \to \Im(z)$, si y solo si $\{\Re(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\Im(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ son de Cauchy. Basta entonces ver que $\{z_n\}$ es de Cauchy si y solo si $\{\Re(z_n)\}$ y $\{\Im(z_n)\}$ son ambas de Cauchy; pero esto se sigue del Lema 1.2. XX

El punto $z \in \mathbb{C}$ se llama **punto límite de la sucesión** $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ si para todo entorno E de z existen infinitos $k \in \mathbb{N}$ tal que $z_k \in E$. Hay que distinguir bien la noción de punto límite de una sucesión con la noción de punto de acumulación de un conjunto. Considere la sucesión $\{z_n = (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces tanto 1 com -1 son puntos límites, sin embargo el conjunto $\{-1, 1\}$ formado por los valores de z_n no tiene puntos de acumulación.

Lema 1.7 *Si z es un punto límite de la sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces z pertenece al cierre del conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración: Sea K el conjunto de los valores que asume z_n, $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in K$ entonces z está a fortiori en el cierre de K. Si $z \notin K$ entonces todo entorno E de z contiene a z (que no pertenece a K) y a infintos z_n que pertenecen a K (pueden ser todos iguales); luego z pertenece a la frontera de K. XX

Si $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión y $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de números naturales $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que $n(k+1) > n(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{z_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ es una **subsucesión** de la sucesión original.

Ejercicio 10 *Demuestre que una sucesión es convergente a z si y solo si toda subsucesión también lo es.*

Usaremos la siguiente notación: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ para una sucesion de números reales x_n significa que dado $R > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq R$ para todo $n \geq n_o$.

1.8 Conjuntos compactos

Teorema 1.2 *Sea $S \subset \mathbb{C}$ no vacio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *S es cerrado y acotado;*
2. *Toda sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de puntos de S admite un punto límite en S;*
3. *Toda sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de puntos de S admite una subsucesión $\{z_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ convergente cuyo límite pertenece a S.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2): Sea K el conjunto de valores que toma la sucesión. Los conjuntos $\Re(K)$ e $\Im(K)$ son acotados por la desigualdad (1.2).

Si tanto $\Re(K)$ como $\Im(K)$ son finitos, entonces K es finito y existirá $w \in K$ tal que $z_n = w$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ con lo que w es un punto de acumulación de la sucesión.

En caso contrario, uno de los dos conjuntos es infinito, por ejemplo, $\Re(K)$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstraß, hay un $a \in \mathbb{R}$ tal que a es punto de acumulación de $\Re(K)$: para todo $\epsilon > 0$ existen infinitos puntos $x \in \Re(K)$ con $|x - a| \leq \epsilon/2$. Luego existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ con $|\Re(z_n) - a| \leq \epsilon/2$; sea $M = \{n \in \mathbb{N} : |\Re(z_n) - a| \leq \epsilon\}$. Si $Y = \{\Im(z_n) : n \in M\}$ es finito hay un $y \in Y$ tal que $\Im(z_n) = y$ para infinitos $n \in M$. Entonces $a + iy$ es un punto de acumulación de la sucesión. Si en cambio Y es infinito entonces admite un punto de acumulación $b \in \mathbb{R}$, y hay infinitos $n \in M$ tal que $|\Im(z_n) - b| \leq \epsilon/2$. Entonces para estos n se tiene

$$|z_n - (a + ib)| = |\Re(z_n) - a + i(\Im(z_n) - b)| \leq |\Re(z_n) - a| + |\Im(z_n) - b| \leq \epsilon \ .$$

Esto demuestra que la sucesión tiene un punto límite p. Como S es cerrado se tiene $p \in S$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea $z \in S$ un punto límite de la sucesión. Para todo $k = 1, 2, \cdots$ el conjunto $M_k = \{n \in \mathbb{N} : |z - z_n| \leq (1/k)\}$ es infinito. Sea $n(0) = 0$. Suponga que ha elegido $n(k)$ para $k = 1, 2, \cdots m$ de tal manera que $0 < n(1) < n(2) < \cdots < n(m)$ y $n(k) \in M_k$. El conjunto M_{m+1} es infinto y se puede por ende elgir $n(m+1) \in M_{m+1}$ tal que $n(m+1) > n(m)$. Entonces la sucesión $\{z_{n(k)} : k = 1, 2, \cdots\}$ es una subsucesión que converge a z. Pues dado $\epsilon > 0$ sea $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $(1/k_o) \leq \epsilon$ entonces $|z - z_{n(k)}| \leq 1/k \leq \epsilon$ para todo $k \geq k_o$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Se prueba la negación.

Si S no es acotado existe una sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Suponga que $\{z_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ es una subsucesión convergente a z. Entonces, $\lim_{k\to\infty} |z_{n(k)}| = |z|$ por un lado y $\lim_{k\to\infty} |z_{n(k)}| = \infty$ por el otro. La subsucesión no puede ser convergente.

Si S no es cerrado y su frontera es vacia entonces S y $\mathbb{C} \setminus S$ son abiertos. Como $\mathbb{C}$ es conexo debemos tener $S = \mathbb{C}$ y volvemos al caso no acotado. En caso contrario sea z un punto de frontera de S que no pertenece a S. Como todo entorno de z contiene a lo menos un punto de S (por ende distinto de z) se puede construir una sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de puntos de S que converge a z. Toda subsucesión converge tanbién a z, pero $z \notin S$. XX

Un conjunto no vacio de números complejos se dice **compacto** si satisface las condiciones equivalentes del teorema.

Lema 1.8 *Si $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados no vacios de $\mathbb{C}$ tal que $K_{n+1} \subset K_n$ para $n \in \mathbb{N}$ y K_o es acotado, entonces existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ seleccione algún punto $z_n \in K_n$. La sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ pertenece a K_o que es compacto. Existe entonces un punto límite $z \in K_o$. Pero z es punto límite de toda subsucesión $\{z_k : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$ que pertenece a K_n. Luego z está en el cierre de cada K_n. Como K_n es cerrado, $z \in K_n$. XX

2

Funciones

2.1 Funciones sobre los complejos

Hablaremos de **función compleja** cuando la función definida en algún subconjunto de $\mathbb{C}$ toma valores en $\mathbb{C}$. Si f es una función compleja anotamos $|f|$ para la función compleja definida para los z donde este definida f por $|f(z)|$ ($|f|$ toma valores no negativos). Las funciones complejas $\Re(f)$ y $\Im(f)$ se definen análogamente ambas toman valores reales).

La notación $f = u+iv$ indica que estamos viendo la función compleja $f(z)$ como función de dos variables reales ($x = \Re(z)$, $y = \Im(z)$) y que $\Re(f) = u$, $\Im(f) = v$.

2.2 Continuidad y consecuencias

Si f es una función compleja definida en un entorno de $z \in \mathbb{C}$ decimos que f es **continua en** z si para todo entorno G de $f(z)$ existe un entorno H de z tal que $f(H) \subset G$.

Ejercicio 11 *Demuestre*

Lema 2.1 *La función compleja f definida en un entorno E de z es continua si y solo si para toda sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$ que converge a z se tiene $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z)$.*

Lema 2.2 *La función compleja $f = u + iv$ definida en un entorno de $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ es continua si y solo si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son ambas continuas en (x_o, y_o).*

2.2.1 Ejemplos

El argumento
La raiz cuadrada

Hemos visto que dado cualquier complejo z no-nulo hay dos complejos $w_1(z)$ y $w_2(z)$ ($w_2(z) - w_1(z)$ aunque esto no viene al caso ahora) distintos tales que $w_1(z)^2 = w_2(z)^2 = z$. Para armar la función "raiz cuadrada", llamemosla f, tal que $f(z)^2 = z$, debemos elegir para cada z alguno de los dos números $w_1(z), w_2(z)$. Por ejemplo:

$$f(z) = \begin{cases} w_1(z) & , \quad \text{si } \Re(z)\Im(z) \text{ es racional} \\ w_2(z) & , \quad \text{sino} \end{cases} .$$

Esta es una función definida sobre todo $\mathbb{C}$, aunque sea bastante inútil y dificil de calcular.

Las dos ramas $w_1(z)$ y $w_2(z)$ de la raiz están dadas por

$$|w_1(z)| = |w_2(z)| = \sqrt{|z|}\,, \;\; \arg(w_1(z)) = (1/2)\arg(z)\,, \;\; \arg(w_2(z)) = (1/2)\arg(z) + (\pi/2)\,.$$

Tomando el argumento principal para especificar el ángulo,

$$f_\pm(z) = \pm\sqrt{|z|}(\cos(\mathrm{Arg}(z)/2) + i\sin(\mathrm{Arg}(z)/2))$$

define dos funciones sobre $\mathbb{C}$ cuyo cuadrado es z. Ambas funciones son continuas fuera de $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = 0\,, \;\; \Re(z) < 0\}$. Observe que si $x < 0$, entonces $f_\pm(x) = \pm i\sqrt{|x|}$. Si $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión con $\pi/2 \le \mathrm{Arg}(z_n) \le \pi$, y $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_\pm(x_n) = f_\pm(x)$. Mientras que si la sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface $-\pi < \mathrm{Arg}(z_n) \le -\pi/2$, y $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_\pm(x_n) = f_\mp(x)$.

Ejercicio 12 *Demuestre el siguiente resultado.*

Proposición 2.1 *Si las funciones f y g son continuas en $z \in \mathbb{C}$ entonces las funciones $f + \alpha g$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), fg y también f/g cuando $g(z) \neq 0$ son continuas en z.*

Si la función compleja f es continua en $z \in \mathbb{C}$ y la función compleja está definida en algún entorno de $f(z)$ y es continua alli, entonces $g(f(z))$ es continua en z.

Teorema 2.1 *Sea f una función compleja continua definida sobre un compacto $K \subset \mathbb{C}$. Entonces $f(K)$ es compacto y existen puntos z_M y z_m en X tales que $|f(z_M)| \geq |f(z)| \geq |f(z_m)|$ para todo $z \in X$.*

Demostración: Usamos la caracterización 3. de compacidad del Teorema 1.2. Sea $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $f(K)$. Existen $z_n \in K$ tales que $w_n = f(z_n)$. Por la compacidad de K existe una subsucesión $\{z_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} z_{n(k)} = z$ y $z \in K$. Por la continuidad de f, $\lim_{k\to\infty} w_{n(k)} = \lim_{k\to\infty} f(z_{n(k)}) = f(z)$ y $f(z) \in f(K)$. Luego $f(K)$ es compacto.

Sea $s = \sup_{z\in K} |f(z)|$. Existe una sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ en K con $s = \lim_{n\to\infty} |f(z_n)|$. Tomando una subsucesión $\{z_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ con límite z_M y por la continuidad de $z \mapsto |f(z)|$, tenemos $s = \lim_{k\to\infty} |f(z_{n(k)})| = |f(z_M)|$. Similarmente se procede para encontrar a z_m. XX

2.3 Convergencias de sucesiones de funciones

Decimos que la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ de funciones complejas definidas en $X \subset \mathbb{C}$ **converge** a la función f definida sobre X si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)\,, \quad z \in X\,. \tag{2.1}$$

En otras palabras, dado $\epsilon > 0$ y $z \in X$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ (que puede depender de z) tal que $|f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon$. Anotamos $f_n(z) \to f(z)$ o bien $f_n \to f$. Es inmediato que si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ entonces $(f_n + \alpha g_n) \to f + \alpha g$, $f_n g_n \to fg$ y también $f_n(z)/g_n(z) \to f(z)/g(z)$ para $g(z) \neq 0$.

Ejercicio 13 *Demuestre que si $f_n \to f$ entonces $|f_n| \to |f|$ pero lo inverso no es cierto.*

Considere las funciones $f_n(z) = z^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sobre $\mathbb{C}$. Son continuas en tanto que analítica s. Ya que

$$|f_n(z)| = |z|^{n+1}$$

tenemos que $f_n \to 0$ en el disco abierto $D(0,1)$, pues $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ con $0 \leq x < 1$. La misma identidad indica que fuera del disco, i.e., $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, la sucesión de funciones no converge pues la sucesión $|f_n|$ no lo hace. Sobre la frontera del disco, $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ para algún $\alpha \in \arg(z)$ y $f_n(z) = \cos(\alpha(n+1)) + i\sin(\alpha(n+1))$ que no converge salvo para valores muy especiales de α.

Si $f_n \to f$ decimos que la convergencia es **uniforme** si el límite (2.1) es uniforme en z, o sea

$$\text{dado } \epsilon > 0 \text{ existe } n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon \text{ para todo } z \in X \text{ y todo } n \geq n_o\,. \tag{2.2}$$

Considere por ejemplo las funciones continuas $f_n(z) = \exp(|z|/(n+1))$, para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$. Sea $f(z) = 1$ para $z \in \mathbb{C}$. Se tiene $f_n \to f$ pero no uniformemente. En efecto, si la convergencia fuere uniforme, dado $\epsilon > 0$ tendriamos $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $z \neq 0$ arbitrario

$$\exp(|z|/(n+1)) - 1 = |1 - \exp(|z|/(n+1)| \leq \epsilon$$

para todo $n \geq n_o$. Y tomando el límite $|z| \to \infty$ obtendriamos una contradicción.

Teorema 2.2 *Si $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de funciones f_n continuas en un abierto A que convergen uniformemente a f entonces f es continua en A.*

Demostración: Sea $z \in A$ y $\epsilon > 0$. Tenemos

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f(w) - f_n(w)| + |f_n(z) - f_n(w)|\,.$$

Seleccione $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(\zeta) - f_n(\zeta)| \leq \epsilon/3$ para todo $\zeta \in A$ por la convergencia uniforme. Como f_n es continua, existe $\delta > 0$ tal que $|f_n(z) - f_n(w)| \leq \epsilon/3$ para todo $w \in A$ con $|z - w| \leq \delta$. Para tales w se tiene $|f(z) - f(w)| \leq 3(\epsilon/3) = \epsilon$ lo que completa la demostración. XX

2.4 La derivada

Si f está definida en un entorno de $z \in \mathbb{C}$, y el límite

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} \tag{2.3}$$

existe, entonces define la **derivada de** f **en** z, denotada por $f'(z)$. A primera vista, la definición parece inofensiva. Sin embargo, hay que tener en cuenta que es lo que significa "$\lim_{w \to 0}$": Para toda sucesión $\{w_n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$ con $w_n \to 0$, el límite (2.3) existe y es independiente de la sucesión. En otras palabras, dado un entorno E de $f'(z)$ existe un entorno F de 0 tal que $\frac{f(z+w)-f(z)}{w} \in E$ si $w \in F$.

Ejercicio 14 *Demuestre que si f es* **diferenciable***(o sea existe la derivada) en z entonces f es continua en z.*

El lector recordará que las reglas obtenidas en el cálculo real para derivar: la suma de dos funciones, el producto de dos funciones, el cociente de dos funciones, las potencias, etc. fueron todas obtenidas por métodos algebraicos basados en las propiedades de la suma y la multiplicación. Las mismas demostraciones pueden aplicarse para demostrar los siguientes tres resultados básicos.

Proposición 2.2 *Si las funciones f y g son diferenciables en z entonces:*

1. $(f + \alpha g)'(z) = f'(z) + \alpha g'(z)\,, \quad \alpha \in \mathbb{C}$;
2. $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
3. $(f/g)'(z) = (f'(z)g(z) + f(z)g'(z))/g^2(z)$ *si* $g(z) \neq 0$;

Proposición 2.3 *(Regla de la Cadena) Si $f : \mathbb{C} \supset A \to B \subset \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$, f es diferenciable en $z \in A$, g es diferenciable en $f(z) \in B$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en z y $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.*

Proposición 2.4 *Para un número entero n la derivada de $z \mapsto z^n$ es $z \mapsto nz^{n-1}$ con la provisión de que $z \neq 0$ si n es negativo.*

Como hemos visto las raices de un número complejo son multi-valuadas. Si se elige alguna rama se obtiene una función diferenciable

Ejercicio 15 *Demuestre*

Proposición 2.5 *Si $f(z) = z^{1/m}$, con m entero no nulo, es una rama de la m-ésima raiz entonces $f'(z) = (1/m)f(z)^{1-m}$.*

Veamos ahora algunas funciones que no son diferenciables:
Sea $f(z) = \overline{z}$. Entonces

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} = \frac{\overline{w}}{w}$$

es un número de modulo 1. Si $w \in \mathbb{R}$, el cociente es 1; cuando w es puramente imaginario el cociente es igual a -1. Por lo tanto $\lim_{w \to 0} \frac{\overline{w}}{w}$ no existe.
Sea $g(z) = |z|$. Entonces

$$\frac{g(z+w) - g(z)}{w} = \frac{|z+w| - |z|}{w}\,;$$

el numerador es un número real mientras que el denominador es complejo. Cuando $z = 0$ el cociente es $e^{-i\alpha}$ con $\alpha \in \arg(w)$; un arguemnto como en el ejemplo anterior demuestra que el límite no puede existir. Cuando $z \neq 0$ y w es tal que $|z+w| = |z|$ lo que sucede cuando nos acercamos a z por el círculo de radio $|z|$, entonces el cociente se anula. Si en cambio $\arg(w) = \arg(z)$, o sea nos acercamos a z por el rayo que pasa por 0 y z, entonces $|z+w| = |z| + |w|$ y el cociente es nuevamente $|w|/w$; el límite no puede existir.

2.5 Analiticidad; ecuaciones de Cauchy-Riemann

Decimos que f es **analítica** en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ si la derivada existe en todo punto del abierto A; en general se omite "en un abierto..." ya que se sobreentiende usualmente que el conjunto en cuestión es abierto.

Supongamos que $f = u + iv$ es diferenciable en $z = x + iy$. Entonces tomando w real en (2.3), tenemos

$$f'(z) = \lim_{w\to 0} \frac{u(x+w,y) + iv(x+w,y) - u(x,y) - iv(x,y)}{w}$$

$$= \lim_{w\to 0} \left(\frac{u(x+w,y)-u(x,y)}{w} + i\frac{v(x+w,y)-v(x,y)}{w} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)$$

pues el límite existe (si y) solo si existen los límites de la parte real e imaginaria. Tomando ahora w puramente imaginario, $w = ih$ en (2.3) tenemos

$$f'(z) = \lim_{ih\to 0} \frac{u(x,y+h) + iv(x,y+h) - u(x,y) - iv(x,y)}{ih}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left((-i)\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h} + \frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{h} \right) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y)\ .$$

Combinando ambas expresiones para $f'(z)$ y considerando la parte real e imaginaria, obtenemos las famosas ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y)$$

(2.4)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)$$

Proposición 2.6 *Si $f = u + iv$ es diferenciable en $z = x + iy$ entonces las derivadas parciales de u y v existen en (x, y), se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.4) y*

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y)\ . \tag{2.5}$$

Estas ecuaciones son necesarias para la diferenciabilidad compleja. Suplementadas con una condición de continuidad, también son suficientes:

Proposición 2.7 *Sean u y v funciones definidas en un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ tales que las derivadas parciales existen y son continuas en A. Si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(x, y) \in A$ entonces $f = u + iv$ es diferenciable en $z = x + iy$, y se tiene (2.5).*

Demostración: Sea $(x, y) \in A$ y $z = x + iy$. Con $w = \xi + i\eta$, y suponiendo que tanto ξ como η son tales que $(x + \xi, y + \eta) \in A$, tenemos

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \frac{u(x+\xi,y+\eta)-u(x,y)}{\xi+i\eta} + i\frac{v(x+\xi,y+\eta)-v(x,y)}{\xi+i\eta}\ . \tag{2.6}$$

La hipótesis de existencia y continuidad de las derivadas parciales implica que

$$u(x+\xi,y+\eta) - u(x,y) = \xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,g(x,y,\xi,\eta)\ ,$$

$$v(x+\xi,y+\eta) - v(x,y) = \xi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y) + \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y) + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,h(x,y,\xi,\eta)\ ,$$

donde las funciones g y h tienen la propiedad

$$\lim_{\xi\to 0\ ,\ \eta\to 0} g(x,y,\xi,\eta) = \lim_{\xi\to 0\ ,\ \eta\to 0} h(x,y,\xi,\eta) = 0\ .$$

Insertando esto en (2.6) obtenemos

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \frac{\xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y)+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y)+\sqrt{\xi^2+\eta^2}g(x,y,\xi,\eta)}{\xi+i\eta}$$

$$+i\frac{\xi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)+\eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y)+\sqrt{\xi^2+\eta^2}h(x,y,\xi,\eta)}{\xi+i\eta}$$

$$= \frac{1}{\xi+i\eta}\left(\xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y)+i\eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x,y)\right)+\frac{i}{\xi+i\eta}\left(\xi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)-i\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y)\right)$$

$$+\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi+i\eta}\left(g(x,y,\xi,\eta)+h(x,y,\xi,\eta)\right)\ .$$

Ahora usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann y obtenemos

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)+\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi+i\eta}\left(g(x,y,\xi,\eta)+h(x,y,\xi,\eta)\right)\ .$$

El factor $\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi+i\eta} = \frac{\xi-i\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$ es de módulo igual a 1 y por ende tomando el límite $\xi \to 0$ y $\eta \to 0$ obtenemos la existencia de la derivada en z y la relación $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)$. XX

Veremos más adelante que si $f = u + iv$ es analítica entonces las derivadas parciales de u y v son continuas. Con esto quedará demostrado el siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.3 *La función $f = u + iv$ es analítica en un abierto A si y solo si las funciones u y v tienen derivadas parciales continuas y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A.*

El siguiente resultado resulta de una aplicación de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 2.4 *Si f es analítica en un dominio D cualquiera de las siguientes propiedades implica que f es constante:*

1. *$f'(z) = 0$ para todo $z \in D$;*
2. *$z \mapsto \Re(f(z))$ es constante en D;*
3. *$z \mapsto \Im(f(z))$ es constante en D;*
4. *$z \mapsto |f(z)|$ es constante en D.*

Ejercicio 16 *Demuestre el teorema y convenzase de que el resultado es falso si D es abierto pero no conexo.*

2.6 Funciones armónicas

Considere una función $f = u + iv$ que es analítica en un dominio D y suponga que las derivadas parciales de segundo orden tanto de u como de v existen. Entonces, ya que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\ ;\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\right)\ ,$$

obtenemos de las ecuaciones de Cauchy-Riemann la relación

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

o sea u satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = 0\ . \tag{2.7}$$

Una función definida en un dominio de $\mathbb{R}^2$ con derivadas parciales de segundo orden que satisface la ecuación de Laplace se llama **armónica**. Un cálculo análogo demuestra que v también es armónica.

Veremos más adelante que el hecho de que $f = u + iv$ es análitica garantiza que tanto u como v admiten derivadas parciales de segundo orden; esto completará la demostración del siguiente resultado

Teorema 2.5 *Si $f = u + iv$ es analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ entonces u y v son ambas armónicas sobre D (visto como dominio de $\mathbb{R}^2$).*

Para un par (u, v) de funciones armónicas sobre el mismo dominio D la analiticidad de $f = u + iv$ en D es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D. En tal caso estas funciones se llaman **armónicas conjugadas**.

Dada un función armónica u: ¿es posible encontrar una armónica conjugada? La respuesta es: no siempre –como se vera en un ejercicio. Para encontrar la armónica conjugada es preciso resolver las ecuaciones de Cauchy-Riemann vistas como ecuaciones diferenciales parciales para la función incógnita v:

Un ejemplo: Sea $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$ sobre $\mathbb{R}^2$. Se calcula

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \ , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x, y) = 1 - 6xy \ ;$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x, y) = 6x \ , \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x, y) = -6x \ .$$

u es armónica en $\mathbb{R}^2$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann dan

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x, y) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x, y) = 1 - 6xy \ ;$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x, y) = 3(x^2 - y^2) \ .$$

Integrando la primera ecuación (respecto de y) se obtiene

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + a(x)$$

donde a es una función arbitraria de x. Integrando la segunda ecuación (respecto de x) se obtiene

$$v(x, y) = 3x^2 y - x + b(y)$$

donde b es función de y. Igualando, obtenemos $a(x) = -x + c$, $b(y) = -y^3 + c$, donde c es una constante real arbitraria, y $v(x, y) = 3x^2 y - y^3 - x + c$. Por su construcción v es armónica en $\mathbb{R}^2$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es entera. Es fácil verificar que $f(z) = z^3 - i(z + c)$ y esta función es manifiestamente entera.

3

Series de potencias

3.1 Series

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es una expresión formal donde los sumandos son números complejos. La N-ésima ($N \in \{0, 1, 2, \cdots\} =: \mathbb{N}$) suma parcial de la serie es

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_N \ .$$

La serie es **convergente** si la sucesión de sumas parciales $\{S_N : N \in \mathbb{N}\}$ es convergente: o sea si existe un número complejo S (la **suma** de la serie) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S - S_N| < \epsilon \ , \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N} \text{ con } N \geq N_o \ .$$

En tal caso se escribe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$. Si la serie no es convergente, se dice **divergente**. La serie se llama **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (formada por los módulos $|z_n|$ de los sumandos z_n de la serie) es convergente.

Si una dada serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces

$$|z_n| = |S_n - S_{n-1}| \leq |S - S_n| + |S - S_{n-1}|$$

y por ende $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, lo que provee un criterio necesario simple para la convergencia. Pero esto no alcanza como es conocido del análisis real[1]. Un criterio necesario y suficiente para la convergencia de una serie es el llamado **Criterio de Cauchy** cuya demostración es idéntica que en el caso real:

Proposición 3.1 (Criterio de Cauchy) *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo par de números naturales N y M con $M > N \geq N_o$ se tiene*

$$|\sum_{n=N+1}^{M} z_n| < \epsilon \ .$$

La convergencia absoluta es mas fuerte que la convergencia:

Proposición 3.2 *Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente entonces es convergente.*

Demostración: De la convergencia aboluta se desprende que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |z_j| < \epsilon \ .$$

Si $M > N \geq N$ entonces, por la desigualdad del triángulo,

$$|\sum_{j=0}^{M} z_j - \sum_{k=0}^{N} z_k| = |\sum_{j=N+1}^{M} z_j| \leq \sum_{j=N+1}^{M} |z_j| < \epsilon \ ,$$

con lo que la serie es convergente por el criterio de Cauchy. XX

En lo que sigue queremos estudiar series donde los sumandos z_n son funciones de una variable compleja, o sea series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

[1] Considere, por ejemplo, la serie con $z_0 = 0$ y $z_n = 1/n$ para $n \geq 1$.

donde f_n es una función a valores complejos de una variable compleja en algún subconjunto de $\mathbb{C}$. Será crucial la noción de convergencia uniforme:

Una sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ de funciones f_n a valores complejos definidas en un conjunto $G \subset \mathbb{C}$ **converge uniformemente** a la función f si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_o$,

$$|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$$

para todo $z \in G$.

Concordantemente, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ donde f_n son funciones definidas en $G \subset \mathbb{C}$ con valores complejos **converge uniformemente** si la sucesión $\{F_N(z) := \sum_{n=0}^{N} f_n(z) : N \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente sobre G.

El siguiente criterio (M-test) es utilísimo para establecer convergencia uniforme

Proposición 3.3 *(M-test) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ una serie convergente de números reales no negativos (o sea: $t_n \geq 0$). Si para todo $z \in G$ se tiene $|f_n(z)| \leq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con n mayor a algún número natural, entonces la serie $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ converge absoluta- y uniformemente en G.*

Demostración: Para algún $n_o \in \mathbb{N}$, se tiene $|f_n(z)| \leq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_o$. Ya que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ es convergente, para dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_1}^{\infty} t_n < \epsilon$, por el criterio de Cauchy. Luego, para $k \geq \max\{n_o, n_1\}$ se tiene $\sum_{n=k}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=k}^{\infty} t_n < \epsilon$, y la convergencia uniforme y absoluta de la serie es cosnsecuencia del criterio de Cauchy. XX

Entre las series mas útiles está la serie geométrica cuyos términos se obtienen multiplicando sucesivamente un número complejo por si mismo, i.e., $z_n = z^n$. La serie geométrica de razón z es entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \ ^{2} . \tag{3.1}$$

Observemos que se tiene la identidad

$$(1-z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^N) = (1-z)\sum_{n=0}^{N} z^n = 1 - z^{N+1}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathbb{C}$. Si $z \neq 1$, obtenemos la N-ésima suma parcial de la serie geométrica como

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} . \tag{3.2}$$

Si $|z| < 1$, entonces $\lim_{N\to\infty} z^N = \lim_{N\to\infty} |z|^N \exp(iNArg(z)) = 0$, y de (3.2) deducimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \ , \quad |z| < 1 .$$

Ya que reemplazando z por $|z|$ en (3.2) la identidad se mantiene, la convergencia es absoluta para $|z| < 1$.

Proposición 3.4 *La serie geométrica (3.1) es:*

1. *absolutamente convergente a $(1-z)^{-1}$ en el disco abierto de radio 1 alrededor de 0;*
2. *divergente fuera del disco cerrado de radio 1 alrededor de 0;*
3. *absoluta- y uniformemente convergente a $(1-z)^{-1}$ en todo disco cerrado alrededor de 0 de radio inferior a 1.*

Demostración: Ya hemos verificado la afirmación 1.

Considere el disco cerrado alrededor de 0 de radio $r < 1$. Entonces para z en este disco

$$|\frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{N} z^n| = |\frac{z^{N+1}}{1-z}| = \frac{|z|^{N+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{N+1}}{1-|z|} \leq \frac{r^{N+1}}{1-r} ,$$

[2] Aquí se usa la convención $z^0 = 1$.

donde hemos usado la desigualdad $|1-z| \geq 1-|z|$. Dado $\epsilon > 0$, basta elegir N lo suficientemente grande como para que $r^{N+1}/(1-r) < \epsilon$ – lo que se puede hacer ya que $r < 1$ – para que el miembro izquierdo sea menor que ϵ para todo z en el disco. El mismo argumento se puede repetir para demostrar que la convergencia es absoluta. Esto completa la demostración de la afirmación 3.

Si $|z| > 1$, entonces $\lim_{N\to\infty} z^N$ no existe – el módulo de z^N aumenta sin límite – y la fórmula (3.2) indica que la serie es divergente, demostrando la afirmación 3. XX

.

El resultado anterior pide a gritos la respuesta a la pregunta: ¿Que pasa con la convergencia sobre el círculo de radio? Es bastante inmediato verificar que la serie geométrica diverge para todo z con $|z| = 1$.

El siguiente resultado se conoce por el nombre de **criterio del cociente**.

Proposición 3.5 (Criterio del Cociente) *Suponga que $C = \lim_{n\to\infty} |z_{n+1}/z_n|$ existe y es finito o bien ∞; entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente cuando $C < 1$ y diverge cuando $C > 1$.*

Demostración: Si $C < 1$ existe A con $C < A < 1$ y, por la existencia del límite, hay un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|z_{n+1}/z_n| < A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > n_o$. Entonces, para tales n,

$$|z_n| = \left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right| \left|\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{z_{n_o+1}}{z_{n_o}}\right| |z_{n_o}| \leq |z_{n_o}| A^{n-n_o} , \tag{3.3}$$

ya que cada cociente es de módulo menor que A y hay $n-n_o$ de ellos. La convergencia absoluta se desprende del M-test ya que $\sum_{n=n_o}^{\infty} A^{n-n_o}$ es una serie geométrica convergente pues $A < 1$.

Si $C > 1$, existe B con $1 < B < C$, y $n_o \in \mathbb{N}$ con $|z_{n+1}/z_n| > B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_o$. La misma factorización que en (3.3) muestra que $|z_n| \geq |z_{n_o}| B^{n-n_o}$ para estos n. Pero entonces $\lim_{n\to\infty} z_n$ no existe (en particular no es nulo) ya que $\lim_{n\to\infty} B^{n-n_o} = \infty$ al ser $B > 1$. La serie es por ende divergente. XX

3.2 Series de potencias

Una serie de potencias es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n ; \tag{3.4}$$

donde los **coeficientes** a_n son números complejos, z es una variable compleja, y $z_o \in \mathbb{C}$ es el **centro** de la serie. La pregunta respecto a la convergencia de estas series tiene la siguiente resopuesta:

Teorema 3.1 *Dada la serie de potencias (3.4), sea*

$$R := \left(\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\{k\in\mathbb{N}: k\geq n\}} \sqrt[k]{|a_k|}\right)\right)^{-1}$$

que es un número no negativo o bien $+\infty$. Entonces,

1. *la serie converge absolutamente en $D(z_o; R)$;*
2. *la serie converge absoluta- y uniformemente en todo $\overline{D(z_o;\rho)}$ con $\rho < R$;*
3. *la serie diverge en $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_o; R)}$.*

Antes de pasar a la demostración de de este resultado conviene hacer algunas observaciones:

- R se denomina el **radio de convergencia** de la serie y el disco abierto alrededor de z_o de radio R, $D(z_o; R)$, se llama **el disco de convergencia** de la serie. Notese que este disco es vacio si $R = 0$ y todo $\mathbb{C}$ si $R = \infty$.
- Se entiende por $\sqrt[n]{|a_n|}$ la raiz n-ésima positiva del módulo $|a_n|$ del n-ésimo coeficiente de la serie.

- El límite en la definición de R se llama el **límite superior**. Esta definido para cualquier sucesión de números reales. En nuestro caso, la sucesión es $\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \in \mathbb{N}\}$ y estos números son postivos. Para $n \in \mathbb{N}$ considere

$$c_n := \sup_{\{k\in\mathbb{N}:\, k\geq n\}} \sqrt[k]{|a_k|} = \sup\{\sqrt[n]{|a_n|},\ \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|},\ \sqrt[n+2]{|a_{n+2}|}, \cdots\} .$$

  Tenemos $R = 1/c$ donde $c := \lim_{n\to\infty} c_n$. Distingamos dos casos:

  1) Si la sucesión $\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \in \mathbb{N}\}$ es acotada, o sea existe un número $K > 0$ con $\sqrt[n]{|a_n|} \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces c_n es la menor de las cotas superiores de los números $\sqrt[k]{|a_k|}$ para $k \geq n$, y por ende c_n es no negativo y menor o igual que K. Tenemos $c_n \geq c_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ya que el conjunto de números sobre los cuales se toma el supremo para n contiene a aquellos sobre los cuales se toma el supremo para $n+1$. La sucesión $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ es en este caso no creciente y acotada por debajo por 0 ya que los c_n son no negativos. Esto garantiza que $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ existe, es finito, mayor o igual a 0 y $c \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando $c = 0$, $R = \infty$.

  2) En caso contrario, o sea cuando la sucesión $\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \in \mathbb{N}\}$ no es acotada, se tiene $c_n = +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por ende $c = +\infty$ y $R = 0$.

- El lector podrá ejercitarse demostrando que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, entonces es igual a c.

- Supongamos que c es finito (Caso 1)). Tenemos las siguientes propiedades características que se usarán en la demostración del Teorema:

  - Si $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $c_n < c+\epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_o$. Luego, ya que $\sqrt[k]{|a_k|} \leq c_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq n$, tenemos $\sqrt[k]{|a_k|} < c + \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq n_o$.
  - Si $c > 0$ y d es real con $0 < d < c$ entonces se tiene $\sqrt[n]{|a_n|} > d$ para un conjunto infinito de números naturales n. En efecto, si esto no es el caso, $\sqrt[n]{|a_n|} > d$ para un número finito de n y $\sqrt[n]{|a_n|} \leq d$ para un número infinito de n. Pero entonces podemos elegir N lo suficientemente grande para que $c_N \leq d$ con lo que $c \leq d$ contradiciendo la hipótesis $d < c$.

Demostración del Teorema: Haremos referencia a las observaciones previas. Demostramos primeramente las afirmaciones sobre convergencia:

a) Si $c = +\infty$ y $R = 0$, las afirmaciones 1. y 2. del Teorema son banales ya que para $z = z_o$ la serie converge a 0.

Sea $c \geq 0$ y $R > 0$ o bien $R = +\infty$. Dado $\rho < R$, elegimos un número real ℓ tal que $c < \ell < 1/\rho$. Existe entonces, por la última observación previa a esta prueba, un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < \ell$ para todo $n \geq n_o$. Entonces,

$$|a_n(z - z_o)^n| = |a_n|\,|z - z_o|^n = \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n\ |z - z_o|^n < (\ell\rho)^n$$

para todo z en el disco cerrado de radio ρ alrededor de z_o. Ya que $\ell\rho < 1$ la serie geométrica $\sum_{j=0}^{\infty}(\ell\rho)^j$ es convergente y aplicando el $M - test$, la serie de potencias (3.4) es absoluta- y uniformemente convergente. Esto demuestra la afirmación 2.

b) Siempre con la suposición $c \geq 0$ y $R > 0$ o bien $R = +\infty$, si $|z - z_o| < R$ existe ρ con $|z - z_o| < \rho < R$. La afirmación 1. se desprende entonces de la afirmación 2.

Veamos ahora la afirmación 3. Si $c = 0$ y $R = +\infty$ no hay nada que demostrar. Suponemos entonces que $c > 0$, o sea que R es finito. Para $z \in \mathbb{C}$ con $|z - z_o| > R$, elegimos p real con $|z - z_o|^{-1} < p < c$. Por la última observación previa a la prueba, hay un número infinito de a_n con $\sqrt[n]{|a_n|} > p$. Para estos últimos, se tiene

$$|a_n(z - z_o)^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n |z - z_o|^n > (p|z - z_o|)^n ,$$

con lo que $\lim_{n\to\infty} a_n(z - z_o)^n$ no existe – ya que $\lim_{n\to\infty}(p|z - z_o|)^n = \infty$ pues $p|z - z_o| > 1$ – y la serie es divergente. XX

El cálculo del radio de convergencia a partir de la definición suele ser complicado. El siguiente resultado derivado del criterio del cociente es útil en la práctica:

Proposición 3.6 *Dada une serie de potencias (3.4), si* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *existe y es finito o bien* ∞*, entonces es igual al radio de convergencia de la serie.*

Demostración: Sea $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$. Aplicamos el criterio del cociente a la serie. Tenemos $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}(z-z_o)^{n+1}/(a_n(z-z_o)^n)| = |z-z_o|/\rho$, entendiendo que $|z-z_o|/0 = \infty$. Si $|z-z_o| < \rho$ el límite es menor que 1 y la serie es convergente. Si $|z-z_o| > \rho$ el límite es mayor que 1 y la serie divergente. Por el Teorema anterior, ρ es el radio de convergencia. XX

3.3 Analiticidad de la suma de una serie de potencias

Teorema 3.2 *Si $f(z)$ es la suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ dentro de su disco de convergencia $D(z_o,R)$ $(R>0)$, entonces f y todas sus derivadas $f^{(n)}$, $n \geq 1$, son analíticas en $D(z_o,R)$. Se tiene*

$$a_n = f^{(n)}(z_o)/n!\ , \quad n \in \mathbb{N}\ ,$$

y

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_o)}{n!}(z-z_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!\ a_{n+k}}{n!}(z-z_o)^n\ , \quad z \in D(z_o,R)\ , \quad k \in \mathbb{N}\ .$$

Para demostrar el Teorema usaremos el siguiente resultado que ilustra bien como a veces el Teorema fundamental de las series de potencias resulta útil en el cálculo de límites numéricos.

Lema 3.1 *Si $c_n \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_{n\pm k}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea k un entero distinto de 0 y defina $c_m = 0$ si $m \leq -1$. Considere las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} z^n\ .$$

La primera tiene a

$$R_1 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}}$$

y la segunda a

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_{n+k}}}$$

como radios de convergencia. Sean $f_N(z)$ y $g_N(z)$ las respectivas N-ésimas sumas parciales de estas series y f y g las sumas en sus respectivos discos de convergencia. Tenemos las identidades

$$z^k g_N(z) = f_{N+k}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j\ , \ k \geq 1\ ; \tag{3.5}$$

$$g_N(z) = z^{|k|} f_{N-|k|}(z)\ , \quad k \leq -1\ . \tag{3.6}$$

Sea $k \geq 1$. Si $|z| \leq R_1$ entonces $f_N(z) \to f(z)$ y la identidad (3.5) implica que $z^k g_N(z)$ converge (a $f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j$) y por ende $g_N(z)$ converge con lo cual $|z| \leq R_2$. Si $|z| \leq R_2$ entonces $g_N(z) \to g(z)$ y la identidad (3.5) implica que $f_N(z)$ converge (a $z^k g(z) + \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j$); por lo tanto $|z| \leq R_1$. Esto prueba que $D(0,R_1) = D(0,R_2)$ o sea $R_1 = R_2$.

Para $k \leq -1$ se usa la identidad (3.6) del mismo modo. XX

Demostración del Teorema: Las N-ésima suma $f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_o)^n$ es entera y su derivada es $f_N'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_o)^n$.

Primera parte: Queremos probar que la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_o)^n \tag{3.7}$$

tiene el mismo radio de convergencia. Veamos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Se tiene $\ln(\sqrt[n]{n+1} = (1/n)\ln(n+1) \leq (1/n)\ln(n)$. Sea $f(x) = (1/x)\ln(x)$, $x > 0$. Por la regla de l'Hôpital, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(1/x) = 0$. Luego, $\lim_{n\to\infty}(1/n)\ln(n) = 0$. Ya que $\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \sqrt[n]{n+1}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}$, basta con verificar que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ lo que se sigue del Lema.

Segunda parte: Sea $g(z)$ la suma de la serie de potencias en $D(z_o, R)$. Probamos que $g = f'$. Sea $\epsilon > 0$, $z \in D(z_o, R)$, $0 < r < R - |z - z_o|$ y $z \neq w \in D(z, r)$. Se tiene

$$|w - z_o| \leq |w - z| + |z - z_o| \leq r + |z - z_o| < R\,.$$

Para $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) = \left(\frac{f_N(w) - f_N(z)}{w - z} - f'_N(z)\right) + (f'_N(z) - g(z)) + \frac{\zeta_N(w) - \zeta_N(z)}{w - z}\,,$$

donde

$$\zeta_N(\omega) = \sum_{n=N+1} a_n(\omega - z_o)^n\,,\quad \omega \in D(z_o, R)\,.$$

Existe N_1 tal que $|f_N(z) - g(z)| \leq \epsilon/3$ si $N \geq N_1$.

Tenemos

$$\frac{\zeta_N(w) - \zeta_N(z)}{w - z} = \sum_{n=N+1} a_n \frac{(w - z_o)^n - (z - z_o)^n}{((w - z_o) - (z - z_o)}\,.$$

Usando la fórmula $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}$ válida para todo par de complejos a, b distintos, obtenemos

$$\left|\frac{(w - z_o)^n - (z - z_o)^n}{((w - z_o) - (z - z_o)}\right| = \left|\sum_{j=0}^{n-1}(w - z_o)^j(z - z_o)^{n-1-j}\right| \leq \sum_{j=0}^{n-1}|w - z_o|^j|z - z_o|^{n-1-j}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1}(r + |z - z_o|)^j|z - z_o|^{n-1-j} \leq \sum_{j=0}^{n-1}(r + |z - z_o|)^j(r + |z - z_o|)^{n-1-j} = n(r + |z - z_o|)^{n-1}\,.$$

Luego,

$$\left|\frac{\zeta_N(w) - \zeta_N(z)}{w - z}\right| \leq \sum_{n=N+1} n|a_n|(r + |z - z_o|)^{n-1}\,.$$

De la convergencia de la serie (3.7) en $D(z_o, R)$ y del hecho que $r + |z - z_o| < R$, deducimos que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{\zeta_{N_2}(w) - \zeta_{N_2}(z)}{w - z}\right| \leq \epsilon/3$$

para todo $N \geq N_2$.

Sea $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Como $F'_{N_3}(z)$ es la derivada de f_{N_3} en z, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left|\frac{f_{N_3}(w) - f_{N_3}(z)}{w - z} - f'_{N_3}(z)\right| \leq \epsilon/3$$

para todo $w \in D(z, \delta_1)$. Si tomamos $\delta = \min\{\delta_1, r\}$ obtenemos

$$\left|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z)\right| \leq \left|\frac{f_{N_3}(w) - f_{N_3}(z)}{w - z} - f'_{N_3}(z)\right| + \left|f'_{N_3}(z) - g(z)\right| + \left|\frac{\zeta_{N_3}(w) - \zeta_{N_3}(z)}{w - z}\right| \leq \epsilon\,,$$

para todo $w \in D(z, \delta)$ con $w \neq 0$. Esto prueba que $g = f'$.

Observe que $f(z_o) = a_o$ y $g(z_o) = f'(z_o) = a_1$.

Tercera parte: Aplicamos ahora el mismo procedimiento a la serie que define a $g = f'$ para obtener

$$f''(z) = g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 2)(n + 1)a_{n+2}(z - z_o)^n$$

y $f''(z_o) = 2a_2$. Repitiendo esto k veces obtenemos la demostración. XX

4

La función exponencial y sus amigas

4.1 La exponencial; funciones "trigonométricas" e "hiperbólicas" complejas

Proposición 4.1 *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \,. \tag{4.1}$$

tiene radio de convergencia ∞ *y define una función entera* exp *llamada exponencial que es su propia derivada y satisface*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \,, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \,. \tag{4.2}$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, *se tiene* $\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.

La función exponencial es periódica de período $i2\pi$.

Demostración: Para el módulo del cociente entre el n-ésimo y el $(n+1)$-ésimo coeficiente tenemos,

$$\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = n$$

y esto tiende a ∞ para $n \to \infty$. Luego la serie es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$ (por el criterio del cociente (3.6)) y por ende uniformemente convergente en todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$. Tenemos entonces

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{n} \frac{z^\ell w^{n-\ell}}{\ell!(n-\ell)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} z^\ell w^{n-\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \,.$$

Si $z = \alpha$ es real, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}\alpha^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \,.$$

En particular $\exp(z + i2n\pi) = \exp(z)\exp(i2n\pi) = \exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo entero n. Derivando la serie término a término y usando la convergencia uniforme,

$$\exp'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \,. \boxed{\text{XX}}$$

En analogía con las funciones trigonométricas se definen

$$\cos(z) = (\exp(iz) + \exp(-iz))/2 \,, \quad \sin(z) = (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i) \,, \quad z \in \mathbb{C} \,.$$

Estas funciones son enteras, el coseno es "par" $\cos(-z) = \cos(z)$, el seno es "impar" $\sin(-z) = -\sin(z)$, y

$$\cos'(z) = -\sin(z) \,, \quad \sin'(z) = \cos(z) \,.$$

Se cumplen además todas las relaciones conocidas para las funciones trigonométricas:

$$\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1 \,;$$

También se definen las análogas de las funciones hiperbólicas

$$\cosh(z) = (\exp(z) + \exp(-z))/2 \,; \quad \sinh(z) = (\exp(z) - \exp(-z))/2 \,.$$

Obviamente

$$\cosh(iz) = \cos(z) \,; \quad \sinh(iz) = i\sin(z) \,.$$

4.2 La inversa de la exponencial: el logaritmo

Observese que $\exp(z) = \exp(\Re(z))\exp(i\Im(z))$ no es nulo para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado un complejo no-nulo w tenemos $w = |w|\exp(i\alpha)$ para cualquier $\alpha \in \arg(w)$. Buscamos $z \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(z) = w$. Obtenemos

$$\exp(\Re(z))\exp(i\Im(z)) = |w|\exp(i\alpha)\ ,$$

de donde

$$\Re(z) = \ln(|w|)\ \ ,\quad \Im(z) = \alpha + 2n\pi\ ,\quad n \text{ un entero arbitrario}\ .$$

Proposición 4.2 *Para todo $0 \neq w \in \mathbb{C}$ existen infinitos complejos z tales que $\exp(z) = w$. Se tiene $\Re(z) = \ln(|w|)$ y $\Im(z) = \arg(w)$.*

Llamamos **rama del logaritmo** a cualquier función f definida sobre un abierto $G \subset \mathbb{C}$ tal que

$$\exp(f(z)) = z\ . \tag{4.3}$$

Proposición 4.3 *Si f es la rama del logaritmo definida en el abierto G entonces f es analítica y $f'(z) = 1/z$.*

Demostración: Derivando (4.3) en el abierto usando la regla de la cadena obtenemos $1 = \exp(f(z))f'(z) = zf'(z)$. XX

Dado un número real α arbitrario, sea $G_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} :\ \alpha \in \arg(z)\}$, o sea el plano complejo sin la semirecta (cerrada e infinita) formada por los puntos que tienen a α como argumento, o sea el rayo que parte de 0 y forma el ángulo α con el semieje real positivo. G_α es abierto y la función

$$f(z) = \ln(|z|) + i\arg_{\alpha-2\pi}(z)$$

satisface

$$\exp(f(z)) = \exp(\ln(|z|))\left(\cos(\arg_{\alpha-2\pi}(z)) + i\sin(\arg_{\alpha-2\pi}(z))\right) = z$$

y es por ende una rama del logaritmo. Si $z \neq 0$ es tal que $\alpha \in \arg(z)$ entonces podemos acercarnos a z por uno y otro lado de la semirecta que define a G_α. Si nos acercamos a z por medio de puntos de G_α con argumentos inferiores y cercanos a α; o sea $\{z_n :\ n = 1, 2, \cdots\}$ es una sucesión en G_α tal que $z_n = |z_n|\exp(i(\alpha - \epsilon_n))$ con $\epsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty}|z_n| = |z|$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln(|z_n|) + i(\alpha - \epsilon_n)\right) = \ln(|z|) + i\alpha\ ;$$

si, en cambio, nos acercamos a z por puntos de G_α con argumentos superiores y cercanos a α; o sea $\{z_n :\ n = 1, 2, \cdots\}$ con $z_n = |z_n|\exp(i(\alpha + \epsilon_n))$ con $\epsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty}|z_n| = |z|$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln(|z_n|) + i(\alpha + \epsilon_n - 2\pi)\right) = \ln(|z|) + i\alpha - i2\pi\ .$$

La rama no se puede extender a una función continua sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

La **rama principal del logaritmo** es la función $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$ definida en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} :\ Re(z) \leq 0\ ,\ \Im(z) = 0\} = G_\pi$ que se obtiene de $\mathbb{C}$ quitando el semieje real no-negativo.

4.3 Potencias arbitrarias

Dado un complejo w, definimos la w-ésima potencia de $0 \neq z \in \mathbb{C}$ como cualquier número complejo ζ tal que

$$\zeta = \exp(w\mu)\ ,\quad \text{con } \mu \text{ tal que } \exp(\mu) = z\ .$$

Sabemos que μ no es único, sino que $\mu = \ln(|z|) + i\alpha$ donde $\alpha \in \arg(z)$ es arbitrario. Por lo tanto las w-ésimas potencias de $z \neq 0$ son

$$\zeta = \exp(w\ln(|z|) + iw\alpha)\ \ ,\quad \alpha \in \arg(z)\ .$$

Observe que "z^0"$= 1$. En conformidad con una convención anterior, ponemos $0^w = 0$.

Ejercicio 17 *Verifique que esta definición es consistente con la definición anterior cuando w es un número racional.*

Si llamamos e al valor de la exponencial en 1, $e = \exp(1)$, entonces como e es positivo, y $\arg(e) = \{2n\pi : \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, se tiene

$$e^z = \exp(z \ln(e) + iz2n\pi) = \exp(z) \exp(iz2n\pi) \ .$$

Sin embargo es usual y cómodo convenir que uno usa el argumento principal de e al escribir

$$e^z = \exp(z) \ .$$

5

Transformaciones de Möbius

Estudiamos las transformaciones de Möbius

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{5.1}$$

donde a, b, c y d son constantes complejas. Observamos primeramente que

1. Si se reemplazan las constantes por un múltiplo fijo de ellas obtenemos la misma transformación.
2. Si $c = 0$ la transformación es lineal y está definida en todo $\mathbb{C}$.
3. Si $c \neq 0$ entonces T está definida en todo $\mathbb{C}$ salvo en el punto $-d/c$. Se tiene
$$\lim_{|z|\to\infty} T(z) = a/c\ .$$
4. En el dominio donde T está definida es analítica y $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$.

Cuando $ad = bc$ T es constante y suponemos de ahora en más que $ad \neq bc$. Esta condición implica que ni a ni d son nulos cuando $c = 0$.

A los fines de un tratamiento mas fluído, conviene introducir un punto "ideal" anotado ∞ y convenir que

$$T(\infty) = \begin{cases} a/c & , \quad \text{si } c \neq 0 \\ \infty & , \quad \text{si } c = 0 \end{cases} \quad , \quad T(-d/c) = \infty \text{ cuando } c \neq 0\ .$$

En el fondo el escenario adecuado para la discusión de la transformaciones de Möbius es la esfera de Riemann. Pero no lo haremos aquí. Escribimos $\mathbb{C}_\infty$ para $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Con la transformación de Möbius (5.1) especificada por a, b, c, d conviene asociar a la matriz

$$\widehat{T} = \begin{pmatrix} a & , & b \\ c & , & d \end{pmatrix}\ .$$

Si las transformaciones de Möbius T y S tienen asociadas las matrices $\widehat{T}$ y $\widehat{S}$ entonces la aplicación compuesta $(T \circ S)(z) = T(S(z))$ también es una transformación de Möbius y la matriz asociada es el producto de las matrices de T y de S: $\widehat{T \circ S} = \widehat{T}\widehat{S}$

Ejercicio 18 *Verifique esto.*

En particular, ya que $det(\widehat{T}) = ad - bc \neq 0$, $\widehat{T}$ es invertible

$$\widehat{T^{-1}} = (ad-bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & , & -b \\ -c & , & d \end{pmatrix}$$

y tiene asociada la transformación de Möbius inversa a T: $(T \circ T^{-1})(z) = (T^{-1} \circ T)(z) = z$.

Lema 5.1 *1. Una transformación de Möbius T distinta a la identidad ($T(z) \neq z$ para algún $z \in \mathbb{C}$) tiene a lo máximo dos puntos z_1, z_2 fijos distintos ($T(z_1) = z_1$ y $T(z_2) = z_2$) en $\mathbb{C}_\infty$.*

2. Una transformación de Möbius T distinta a la identidad está determinada por las imagenes de cualquier trio (z_1, z_2, z_3) de puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$.

Demostración: 1): Sea T dada por (5.1). Si $c = 0$ (recuerde que $ad \neq 0$), entonces ∞ es punto fijo y ya que $T(z) = (a/d)z + (b/d)$, el otro punto fijo es $b/(a-d)$ si $a \neq d$ y en caso contrario, no hay otro punto fijo pues T no es la identidad.

Cuando $c \neq 0$ el punto ∞ no es fijo y si $z \in \mathbb{C}$ es un punto fijo, $az+b = z(cz+d)$ o sea $cz^2+(d-a)z-b = 0$; esta ecuación tiene a lo sumo dos soluciones distintas (solo una si $c = 0$).

2): Si T y S son transformaciones de Möbius tal que $T(z_j) = S(z_j)$ para $j = 1, 2, 3$ donde z_1, z_2 y z_3 son distintos en $\mathbb{C}_\infty$, entonces la transformacón de Möbius $T^{-1} \circ S$ satisface $z_j = T^{-1} \circ T(z_j) = T^{-1} \circ S(z_j)$ y

tiene tres puntos fijos distintos. Luego $T^{-1} \circ S$ es la identidad y $S = T$. XX

Este simple resultado hace mucho a la utilidad de las transformaciones de Möbius para la construcción de transformaciones que transformen un dado conjunto en otro dado conjunto (ver ejercicios).

Si z_1, z_2, z_3 son puntos arbitrarios pero distintos en $\mathbb{C}$ la transformación

$$T_{z_1,z_2,z_3}(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3} \ , \ \widehat{T}_{z_1,z_2,z_3} = \begin{pmatrix} z_2 - z_3 & , & z_1(z_3 - z_2) \\ z_2 - z_1 & , & z_3(z_1 - z_2) \end{pmatrix} .$$

satisface $T_{z_1,z_2,z_3}(z_1) = 0$, $T_{z_1,z_2,z_3}(z_2) = 1$ y $T_{z_1,z_2,z_3}(z_3) = \infty$.

Si w_1, w_2, w_3 son puntos arbitrarios pero distintos en $\mathbb{C}$ la transformación T^{w_1,w_2,w_3} que satisface $T^{w_1,w_2,w_3}(0) = w_1$, $T^{w_1,w_2,w_3}(1) = w_2$ y $T^{w_1,w_2,w_3}(\infty) = w_3$ es

$$T^{w_1,w_2,w_3}(z) = \frac{w_3(w_1 - w_2)z + w_1(w_2 - w_3)}{(w_1 - w_2)z + w_2 - w_3} \ , \ \widehat{T}^{w_1,w_2,w_3} = \begin{pmatrix} w_3(w_1 - w_2) & , & w_1(w_2 - w_3) \\ w_1 - w_2 & , & w_2 - w_3 \end{pmatrix} .$$

Luego, la transformación $T^{w_1,w_2,w_3} \circ T_{z_1,z_2,z_3}$ transforma el trio (z_1, z_2, z_3) de complejos distintos en el trio (w_1, w_2, w_3) de complejos distintos.

Considere las siguientes transformaciones de Möbius especiales

$$C_b(z) = z + b \ , \ R_\alpha(z) = e^{i\alpha} z \ (\alpha \in \mathbb{R}) \ , \ D_r(z) = rz \ (r > 0) \ , \ I(z) = 1/z \ ,$$

asociadas a las matrices

$$\widehat{C}_b = \begin{pmatrix} 1 & , & b \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} , \ \widehat{R}_\alpha = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} , \ \widehat{D}_r = \begin{pmatrix} r & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} , \ \widehat{I} = \begin{pmatrix} 0 & , & 1 \\ 1 & , & 0 \end{pmatrix} .$$

C_b es una translación. R_α es una rotación pura por α ya que $|R_\alpha(z)| = |z|$ y $\arg(R_\alpha(z)) = \arg(z) + \alpha$. S_r es una "dilatación" por r pues $|S_r(z)| = r|z|$ y $\arg(S_r(z)) = \arg(z)$. Por último I es la inversión. Combinando estas transformaciones simples, podemos obtener todas las transformaciones de Möbius. Para esto observamos primeramente que cualquier transformación del tipo

$$L_a(z) = az \ , \ 0 \neq a \in \mathbb{C}$$

es de la forma

$$L_a = D_{|a|} \circ R_\alpha \ , \quad \text{con } \alpha \in \arg(a) \ .$$

Entonces,

Ejercicio 19 *Demuestre*

Proposición 5.1 *Si T es la transformación de Möbius dada por (5.1) entonces*

$$T = \begin{cases} L_{a/d} \circ C_{b/a} & , \quad si\ c = 0 \\ C_{a/c} \circ L_{(bc-ad)c^{-2}} \circ I \circ C_{d/c} & , \quad si\ c \neq 0 \end{cases} .$$

Encaramos ahora la demostración del siguiente hecho que redondea el estudio de las propiedades de las transformaciones de Möbius y termina de confirmar que son decididamente hermosas:

Teorema 5.1 *Una transformación de Möbius transforma círculos y rectas en círculos o rectas.*

Para demostrar esto usaremos la transformación T_{z_1,z_2,z_3} que transforma los tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 en 0, 1 e ∞ respectivamente.

Lema 5.2 *Si (z_1, z_2, z_3) es un trio de puntos distintos de $\mathbb{C}$ y M es una transformación de Möbius entonces*

$$T_{z_1,z_2,z_3}(z) = T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}(M(z)) \ , \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}_\infty \ .$$

Demostración: Sea $W = T_{z_1,z_2,z_3} \circ M^{-1}$. Se tiene $W(M(z_1)) = (T_{z_1,z_2,z_3} \circ M^{-1} \circ M)(z_1) = T_{z_1,z_2,z_3}(z_1) = 0$, y similarmente $W(M(z_2)) = 1$ y $W(M(z_3)) = \infty$. Por el punto 2. del Lema anterior $W = T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}$. Luego $T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}(M(z)) = W(M(z)) = T_{z_1,z_2,z_3}(z)$. XX

Lema 5.3 *Si (z_1, z_2, z_3) es un trio de puntos distintos de $\mathbb{C}$ entonces $T_{z_1,z_2,z_3}(z)$ es real para $z \in \mathbb{C}$ si y solo si los cuatro puntos z, z_1, z_2 y z_3 están sobre una recta o sobre un círculo.*

Demostración: La condición $T_{z_1,z_2,z_3}(z) = \overline{T_{z_1,z_2,z_3}(z)}$ es equivalente a

$$\alpha(|z|^2 - z_1\overline{z} - \overline{z_3}z + z_1\overline{z_3}) = \overline{\alpha}(|z|^2 - \overline{z_1}z - z_3\overline{z} + \overline{z_1}z_3)$$

donde $\alpha = (z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) \neq 0$. Tenemos entonces

$$\Im(\alpha)|z|^2 + \Im((\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})z) + \Im(\alpha z_1\overline{z_3}) = 0\,, \tag{5.2}$$

como ecuación determinante para los puntos z tales que $T_{z_1,z_2,z_3}(z) = \overline{T_{z_1,z_2,z_3}(z)}$.

Si $\Im(\alpha) = 0$, entonces (5.2) se reduce a

$$\Im((\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})z) + \Im(\alpha z_1\overline{z_3}) = \Im(\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})\Re(z) + \Re(\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})\Im(z) + \Im(\alpha z_1\overline{z_3}) = 0$$

y determina una recta.

En caso contrario, definimos

$$\zeta = \frac{i}{2\Im(\alpha)}(\overline{\alpha}z_3 - \alpha z_1)\ \ , \qquad R = \frac{|\alpha|}{4|\Im(a)|}|z_1 - z_3|\ ,$$

y después de un espeluznante cálculo algebráico tenemos

$$\Im(\alpha)|z|^2 + \Im((\overline{\alpha z_1} - \alpha\overline{z_3})z) + \Im(\alpha z_1\overline{z_3}) = \Im(\alpha)\left(|z - \zeta|^2 - R^2\right)$$

con lo que (5.2) es equivalente a

$$|z - \zeta|^2 = R^2$$

la ecuación de un círculo de radio R alrededor de ζ. XX

En virtud de los dos Lemas la demostración del Teorema es simple y elegante:

Sea M una transformación de Möbius y Γ un círculo o una recta. Considere tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 de Γ y sean $w_j = M(z_j)$ sus imágenes en $\mathbb{C}_\infty$ que son distintas en virtud de la existencia de la inversa de M. Si alguna de las imágenes es ∞ entonces, w_1, w_2, w_3 determinan aquella recta generada por las dos imágenes finitas. Si los tres puntos imágen son finitos, determinan o bien una recta o bien un círculo.

Llamemos Λ a la recta o círculo determinados por w_1, w_2, w_3. Por el primer Lema, $T_{z_1,z_2,z_3}(z) = T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}(M(z))$. Si $z \in \Gamma$ entonces $T_{z_1,z_2,z_3}(z)$ es real por el segundo Lema. Luego $T_{M(z_1),M(z_2),M(z_3)}(M(z))$ es real y, nuevamente con el segundo Lema, $(M(z), M(z_1), M(z_2), M(z_3))$ están sobre un círculo o sobre una recta; por lo tanto $M(z) \in \Lambda$ o sea $M(\Gamma) = \Lambda$. XX

6

Integración de funciones complejas

6.1 Integración de funciones a valores complejos sobre los reales

Dada una función f de una variable real $t \in [a,b]$ con valores complejos $f(t)$ tal que $t \mapsto f(t)$ es continua, la integral de f sobre el intervalo $[a,b]$ es –ya que tanto $t \mapsto \Re(f(t))$ como $t \mapsto \Im(f(t))$ son continuas– el número complejo

$$\int_a^b \Re(f(t))dt + i\left(\int_a^b \Im(f(t))dt\right) .$$

Valen las reglas usuales de la integración real, e.g. la integral de una suma es la suma de las integrales. Además,

Lema 6.1 *Si* $[a,b] \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$ *es continua*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt .$$

Demostración: Si $\int_a^b f(t)dt = 0$ no hay nada que demostrar. En caso contrario, sea $\alpha \in \arg\left(\int_a^b f(t)dt\right)$; se tiene

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = e^{-i\alpha}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^{-i\alpha}f(t)dt$$

$$= \Re\left(\int_a^b e^{-i\alpha}f(t)dt\right) = \int_a^b \Re\left(e^{-i\alpha}f(t)\right)dt \leq \int_a^b \left|e^{-i\alpha}f(t)\right|dt = \int_a^b |f(t)|dt .$$

La desigualdad es cosnecuencia del siguiente resultado elemantal del cálculo real que recordamos. XX

Lema 6.2 *Si* $[a,b] \ni t \mapsto g(t) \in \mathbb{R}$ *es continua y* $g(t) \geq 0$ *para todo* $t \in [a,b]$ *entonces*

$$\int_a^b g(t)dt \geq 0$$

con igualdad si y solo si $g(t) = 0$ *para todo* $t \in [a,b]$.

Demostración: Recordando la definición de la integral (de Riemann) de una función continua, es evidente que si el integrando es no-negativo también lo será la integral que es límite de sumas de Riemann. También es evidente que la integral se anula cunado se anula g. Supongamos que existe $t_o \in [a,b]$ tal que $g(t_o) > 0$. Entonces, por la continuidad, dado $\epsilon > 0$ con $g(t_o) > \epsilon$

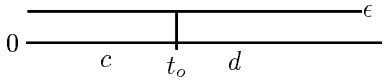


Figura 6.1:

hay un sub-intervalo $[c,d]$ de $[a,b]$ tal que $g(t) \geq g(t_o) - \epsilon > 0$. Luego,

$$\int_a^b g(t)dt \geq \int_c^d g(t)dt \geq (g(t_o) - \epsilon)(d-c) > 0 .$$

XX

6.2 Caminos

Para poder integrar una función a valores complejos sobre los complejos debemos movernos sobre una "curva" (objeto uni-dimensional) en el "plano complejo". Un **camino suave** es una función $z : [a,b] \ni t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}$ cuya derivada

$$z'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{z(t+s)-z(t)}{s} \quad , \quad t \in (a,b)$$

es continua y tal que los límites

$$\lim_{t\to a^+} z'(t) \quad , \quad \lim_{t\to b^-} z'(t)$$

existan y sean finitos. Observe que si $z(t)$ es constante el camino es un punto.

El camino suave $z(t) = (1+a-t)z_1 + (t-a)z_2 = z_1 + (t-a)(z_2-z_1)$, $t \in [a, a+1]$ con $a \in \mathbb{R}$, describe el segmento de recta que parte de del punto z_1 y une a este al punto z_2. Se tiene $z'(t) = z_2 - z_1$ que es constante y a fortiori continua y que satisface las condiciones impuestas en el borde del intervalo $[0,1]$. Este camino suave se llamará **camino rectilineo con punto inicial** z_1 **y punto final** z_2.

El camino suave $z(t) = a + re^{it}$ con $a \in \mathbb{C}$ fijo, $r > 0$ fijo y $t \in [\alpha_o, \alpha_o + \beta]$ $(\alpha_o, \beta \in \mathbb{R},\ \beta > 0)$ describe el arco del círculo de radio r alrededor de a que parte desde $a + re^{i\alpha_o}$ y une a este punto con $a + re^{i(\alpha_o+\beta)}$.

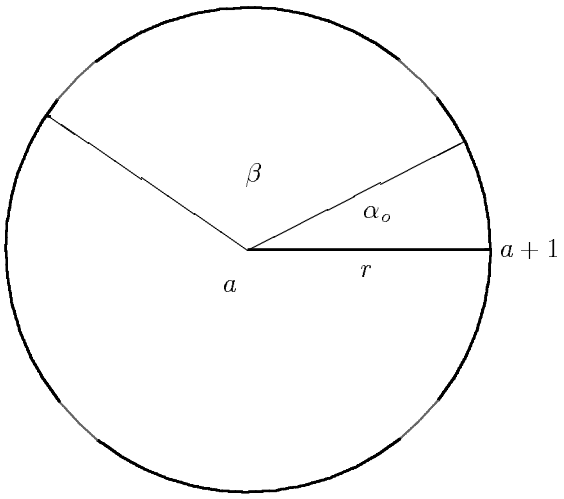


Figura 6.2: Una porción de camino circular

Se tiene $z'(t) = ire^{it}$ que satisface las condiciones impuestas. Notese que nuestra convención $\beta > 0$ indica que siempre se da vueltas en el sentido anti-horario. Este camino se llamará **porción de camino circular (de radio** r**)**, y cuando se da la vuelta completa $(\beta = \alpha_o + 2\pi)$ **camino circular (de radio** r**)**.

En ambos ejemplos es importante notar que el camino es mas que la curva que se describe y está distinción deberá tenerse muy en cuenta. El camino es la función que no solo parametriza la curva que se obtiene como imagen del camino sino que indica en que "dirección" y a que "velocidad" se camina a lo largo de la curva.

También es importante observar que **la curva** $[\gamma]$ **"trazada" por un camino suave** $\gamma = \{[a,b] \ni t \mapsto z(t)\}$, o sea el conjunto $[\gamma] = \{z(t) : \ t \in [a,b]\}$, es cerrado y acotado. En efecto, por continuidad, $t \mapsto |z(t)|$ toma su valor máximo para algún $t_o \in [a,b]$ y $|z(t)| \le ||z(t_o)|$ para todo $t \in [a,b]$.

Considere el camino suave $z(t) = \phi(t)z_1 + (1-\phi(t))z_2$ con $\phi(t) = \cos(\pi t/2) - 0.1\sin(4\pi t)$ para $t \in [0,1]$. Ya que $\phi(0) = 1$, $\phi(1) = 0$ y $0 \le \phi(t) \le 1$, este camino describe el segmento de recta que une z_1 con z_2 pero no hay un movimiento siempre de z_1 a z_2 sino que va hacia z_2 y vuelve hacia z_1 etc.

Llamamos **camino** a una sucesión de caminos suaves que se enpalman. Concretamente, dados n intervalos $[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ y n caminos suaves $\gamma_j = \{[a_j, b_j] \ni t \mapsto z_j(t)\}$, $j = 1, 2, \cdots, n$, tales que $z_j(b_j) = z_{j+1}(a_{j+1})$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$. Escribimos entonces que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$. Y decimos que γ tiene a $z(a_1)$ como **punto inicial** y a $z_n(b_n)$ como **punto final**.

Como la curva trazada por un camino es la unión de las curvas trazadas por los caminos suaves que componen el camino, tenemos

Teorema 6.1 *Si γ es un camino entonces $[\gamma]$ es acotada y cerrada.*

Un camino γ se llama:

- **simple** si no pasa dos veces por el mismo punto: para todo $j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ se tiene $z_j(t) = z_k(s)$ con $t \in [a_j, b_j]$ y $s \in [a_k, b_k]$ solo si $j = k$ y $t = s$.
- **cerrado** si sus puntos incial y final coinciden, $z_1(a_1) = z_n(b_n)$;
- **cerrado simple** si es cerrado y simple cuando se desconsideran los puntos inicial y final (que coinciden)

Si $\gamma = \{[a, b] \ni t \mapsto z(t)\}$ es un camino suave, el **camino inverso** es $-\gamma$ es $\{[-b, -a] \ni t \mapsto z(-t)\}$, o sea el camino recorrido en sentido inverso. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ es un camino su inverso $-\gamma$ es el camino $(-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \cdots + (-\gamma_n)$.

Para los caminos cerrados simples vale el Teorema de Jordan: *La curva $[\gamma]$ trazada por un camino cerrado simple divide al plano complejo $\mathbb{C}$ en dos dominios de los cuales $[\gamma]$ es la frontera. Uno de ellos es acotado y el otro no.*

Si bien el resultado es geométricamente evidente, su demostración no lo es. Aquí usaremos el Teorema de Jordan para fundamentar el siguiente lenguaje: Si γ es un camino cerrado simple, llamamos **dominio encerrado por** γ al dominio acotado. También convenimos en que la frase **"analítica dentro y sobre** γ**"** significará "analítica en un abierto que contiene al dominio encerrado por γ y a $[\gamma]$".

6.3 Integración compleja

Dado un camino suave $\gamma = \{[a, b] \ni t \mapsto z(t)\}$, y una función f a valores complejos definida y continua sobre $[\gamma]$, definimos la integral de f sobre este camino como

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \ .$$

Es importante notar que está integral depende del camino suave elegido, y que la definición se ha reducido a la de una integral de una función continua $[a, b] \ni t \mapsto f(z(t))z'(t)$. Si el camino se reduce a un punto (i.e., $z(t)$ es constante) entonces la integral es 0.

Por el resultado anterior se tiene

Proposición 6.1 *Para un camino suave* γ

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|dt\ .$$

La integral a la derecha se abreviará como

$$\int_\gamma |f(z)|\,|dz|\ ,$$

y nuevamente es importante destacar que depende del camino suave elegido.

Proposición 6.2 *Sean* $\gamma_1 = \{[a,b] \ni t \mapsto z_1(t)\}$ *y* $\gamma_2 = \{[c,d] \ni t \mapsto z_2(t)\}$ *dos caminos suaves. Si existe una función* $\varphi : [a,b] \ni t \mapsto \varphi(t) \in [c,d]$ *continuamente diferenciable y biyectiva tal que* $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, *y* $z_1(t) = z_2(\varphi(t))$ *para todo* $t \in [a,b]$, *entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

para cualquier función f *continua sobre* $[\gamma_1]$ *(*$[\gamma_2]$*).*

Demostración: Esto es consecuencia de la ley de substitución de integrales reales aplicada a la definición; con $s = \varphi(t)$,

$$\int_c^d f(z_2(s))z_2'(s)ds = \int_a^b f(z_2(\varphi(t)))z_2(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(z_1(t))z_1'(t)dt\ .$$

XX

Si $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ es un camino formado por los caminos suaves $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

es la integral de una función a valores complejos definida sobre la curva $[\gamma]$ trazada por el camino γ y continua sobre esta curva. Del Lema anterior se desprende con la desigualdad del triángulo el siguiente resultado fundamental

Teorema 6.2 *Para un camino* γ

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\ .$$

Ejercicio 20 *Verifique que*

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz\ .$$

Ejercicio 21 *Demuestre que si* γ *es un camino,* f *y* g *son funciones complejas definidas y continuas sobre la curva trazada por* γ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$, *entonces*

$$\int_\gamma (f(z) + \alpha g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \alpha \int_\gamma g(z)dz\ .$$

El **largo** $\ell(\gamma)$ del camino γ es

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |z_j'(t)|dt\ .$$

De los dos resultados anteriores obtenemos

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{[\gamma]}\{|f(z)|\}\ \ell(\gamma)\ .$$

Aqui usamos la notación $\max_{[\gamma]}$ para el máximo sobre todos los puntos que pertenecen a la curva trazada por el camino γ.

6.4 Primitivas

Sea f una función definida sobre un abierto $A \subset \mathbb{C}$. Decimos que f **admite una primitiva** en A si existe una función F analítica en A tal que $F' = f$. Esta función F se llama **primitiva** de f en A. Lo que sigue es consecuencia inmediata de que una función analítica en un dominio cuya derivada se anula debe ser constante.

Proposición 6.3 *Si f admite dos primitivas F_1 y F_2 en un dominio A entonces $F_1 - F_2$ es constante.*

Teorema 6.3 *Si γ es un camino con punto inicial z_1 y punto final z_2 y f admite una primitiva F en un abierto que contiene a $[\gamma]$ entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) \ .$$

Demostración: Esto es simplemente el Teorema Fundamental del Cálculo aplicado a la definición de la integral sobre un camino. Es inmediato ver que basta demostrar la afirmación para un camino suave. Sea entonces $\gamma = \{[a,b] \ni t \mapsto z(t)\}$ un camino suave; entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b F'(z(t))dt = F(z(b)) - F(z(a))$$

pues la derivada de la función $t \mapsto F(z(t))$ es $t \mapsto F'(z(t))z'(t)$ por la regla de la cadena. XX

Teorema 6.4 *Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y tal que existen dominios $A_j \subset A$, $j = 1, 2, \cdots$ tales que $A_j \cap A_k = \emptyset$ para $j \neq k$ y $A = \cup_{j=1}^\infty A_j$. Si f es una función compleja sobre A entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *$\int_\gamma f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$ para cualquier par de caminos γ y Γ tales que $[\gamma]$ y $[\Gamma]$ están en A y que sus puntos iniciales y finales coinciden;*
2. *$\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrrado γ tal que $[\gamma] \subset A$;*
3. *Existe una primitiva de f en A.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2): Si γ es cerrado , hay dos caminos γ_1 y γ_2 tales que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ y γ_1 y $-\gamma_2$ tienen los mismos puntos iniciales y finales. Luego

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{-\gamma_2} f(z)dz = 0 \ .$$

(2) $\Rightarrow$ (1): $\gamma + (-\Gamma)$ es cerrado luego

$$0 = \int_\gamma f(z)dz + \int_{-\Gamma} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \int_\Gamma f(z)dz \ .$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Esto es consecuencia del Teorema anterior.
(1) $\Rightarrow$ (3): Si $z \in A$ existe un dominio no vacio A_j que contiene a z. Sea $z_o \in A_j$ con $z_o \neq z$ (recuerde que hay un entorno de z contenido en A_j tome z_o en ese entorno) y defina $F(z_o) = 0$ y

$$F_j(z) = \int_\gamma f(z)dz$$

donde γ es algún camino con punto inicial z_o y punto final z (recuerde que A_j es conexo y existe una poligonal en A_j que une a z_o con z). El número $F_j(z)$ no depende del camino elegido. Dado $0 \neq h \in \mathbb{C}$ tal que $z + h \in A_j$, consideremos el camino rectilineo γ_h que une z con $z + h$. Entonces $[\gamma_h] \subset A_j$ y

$$\frac{F_j(z+h) - F_j(z)}{h} = (1/h)\left(\int_{\gamma + \gamma_h} f(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right) = (1/h)\int_{\gamma_h} f(z)dz$$

$$= (1/h)\int_0^1 f(z+th)h\,dt = \int_0^1 f(z+th)dt \ .$$

Ahora,

$$f(z) = f(z)\int_0^1 dt$$

con lo que

$$\frac{F_j(z+h) - F_j(z)}{h} - f(z) = \int_0^1 (f(z+th) - f(z))dt\ ;$$

pero

$$\left|\int_0^1 (f(z+th) - f(z))dt\right| \leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)|dt\ .$$

Por la continuidad de f, dado $\epsilon > 0$ existe un δ-entorno E de z tal que $|f(w) - f(z)| \leq \epsilon$ para todo $w \in E$. Eligiendo h tal que $|h| < \delta$ deducimos de $|z + th - z| = t\,|h| \leq |h|$ que $z + th \in E$ y por ende

$$\int_b^{b+1} |f(z + (t-b)h) - f(z)|dt \leq \epsilon\ .$$

Luego, F_j es analítica en A_j y su derivada es f'.

Ya que todo $z \in A$ está en algún A_j y estos dominios son disjuntos dos-a-dos:

$$F(z) = F_j(z)\ \ ,\ \ z \in A_j$$

es analítica en A y su derivada es f. XX

La hipótesis sobre A es menos terrible de lo que parece: Es un resultado general que no demostraremos aquí que todo abierto A puede escribirse como unión denumerable de dominios disjuntos dos-a-dos. Tenga en cuenta que los A_j pueden ser vacios (no todos claro).

Las función $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ para un entero $n \neq -1$ es entera para $n \geq 0$ y analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ para $n \leq -2$; su derivada es $z \mapsto z^n$. Del resultado anterior obtenemos inmediatamente:

$$\int_\gamma z^n dz = 0\ ,\ \ n \geq 0\ ,$$

para todo camino cerrado γ;

$$\int_\gamma \frac{1}{z^n} dz = 0\ ,\ \ n \geq 2\ ,$$

para todo camino cerrado γ tal que $0 \notin [\gamma]$.

La función $z \mapsto 1/z$ es especial; sabemos que es la derivada de cualquier rama del logaritmo. Si $G \subset \mathbb{C}$ es un abierto donde se puede definir una rama del logaritmo, entonces

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$$

para cualquier camino cerrado γ tal que $[\gamma] \subset G$.

Calculemos la integral de $1/z$ sobre el camino circular $C(0, r; \alpha, \alpha + 2\pi)$:

$$\int_{C(0,r;\alpha,\alpha+2\pi)} \frac{1}{z} dz = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, ire^{it} dt = i\int_\alpha^{\alpha+2\pi} dt = 2\pi i\ .$$

Esta simple fórmula será la base de muchos desarrollos posteriores del análisis complejo. Tenemos inmediatamente

Proposición 6.4 *Si una rama del logaritmo está definida en el abierto $G \subset \mathbb{C}$ entonces G no contiene ningún círculo centrado en 0.*

Teorema 6.5 *Sea γ un camino y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones f_n definidas y continuas sobre $[\gamma]$. Si la sucesión converge uniformemente a la función f, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\gamma f_n(z)dz\right)\ .$$

Demostración: f es continua sobre $[\gamma]$ como límite uniforme de funciones continuas. Tenemos

$$\left|\int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_n(z)dz\right| = \left|\int_\gamma (f(z)dz - f_n(z))dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)dz - f_n(z)|dz \ .$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon/\ell(\gamma)$ para todo $z \in [\gamma]$ cuando $n \geq n_o$. Luego,

$$\int_\gamma |f(z)dz - f_n(z)|dz \leq \epsilon$$

y esto completa la demostración. XX

Corolario 6.1 *Sea $f(z)$ la suma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ dentro del disco de convergencia $D(z_o, R)$ de esta serie. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

para todo camino cerrado γ tal que $[\gamma] \subset D(z_o, R)$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

tiene el mismo radio de convergencia R y su suma F es una primitiva de f.

Demostración: Ya que $\int_\gamma z^n = 0$ para todo $n \geq 0$, la primera afirmación es consecuencia del Teorema anterior. Ya que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, y $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ por el Lema 3.1, la serie que define a F tiene el mismo radio de convergencia y su derivada se obtiene diferenciando término a término. XX

Los resultados obtenidos indican que: para una gran clase de funciones analíticas f se tiene $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para caminos cerrados y f admite una primitiva. El Teorema de Cauchy-Goursat permite generalizar esto a todas las funciones analíticas.

7

Teoremas de Cauchy-Goursat y Fórmula de Cauchy

Dado un camino cerrado simple γ y el dominio D encerrado por el, imaginemos que recorremos el camino. Al hacerlo, D quedará siempre a nuestra izquierda o siempre a nuestra derecha. En el primer caso el camino se dice **orientado positivamente**; en el segundo **orientado negativamente**.

Nuestra convención indica que un camino circular está orientado positivamente.

En este capítulo usaremos la notación

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

para la integral de f sobre el camino rectilineo que une a z_1 con z_2: $\{[0,1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)\}$. Con esta notación se tiene

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)dz \tag{7.1}$$

y si z_1, z_2 y z_3 son colineales

$$\int_{z_1}^{z_3} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \ + \int_{z_2}^{z_3} f(z)dz \ . \tag{7.2}$$

7.1 Teoremas de Cauchy-Goursat

En lo que sigue demostraremos el Teorema de Cauchy-Goursat, no en su versión más general válida para dominios simplemente conexos –pues esto exige consideraciones de geometría diferencial– sino aquella para discos.

Teorema 7.1 *(Teorema de Cauchy-Goursat (para un disco)) Si f es analítica en un disco abierto entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

para todo camino cerrado tal que $[\gamma]$ pertenece al disco.

La demostración de este resultado que damos aquí se basa en el siguiente resultado clásico debido a Goursat:

Teorema 7.2 *Sea R un rectángulo cerrado en $\mathbb{C}$ y sea ∂R el camino formado por los cuatro caminos rectilineos sucesivos que unen los vértices de R. Si f es analítica en un abierto que contiene a R entonces*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0 \ .$$

Demostración: Sea R un rectángulo genérico en el plano (no necesariamente el dado). Sea $L(R)$ el largo del perímetro de R y $d(R)$ el largo de sus diagonales. Si z_1, z_2, z_3, z_3 son vértices consecutivos de R, considere los cinco puntos: $z_{12} = (z_1+z_2)/2$, $z_{23} = (z_2+z_3)/2$, $z_{34} = (z_3+z_4)/2$, $z_{41} = (z_1+z_4)/2$ y $z_{13} = (z_1+z_3)/2$. Es inmediato verificar que los cuatro cuartetos de puntos $(z_1, z_{12}, z_{13}, z_{14})$, $(z_{12}, z_2, z_{23}, z_{13})$, $(z_{13}, z_{23}, z_3, z_{34})$ y $(z_{14}, z_{13}, z_{34}, z_4)$ son los vértices de sendos cuatro rectángulos iguales R_1,R_2, R_3 y R_4 que son congruentes con R. El perímetro de cada uno de ellos es $L/2$ y el largo de las diagonales respectivas es $d/2$.

Supongamos que f es analítica en un dominio que contiene a R y por ende a los rectángulos $R_1, \cdots, R_4$. Sea ∂R el camino cerrado simple que se obtiene concatenando los cuatro caminos rectilineos que unen los pares de vértices consecutivos. Tenemos

$$I(R) := \int_{\partial R} f(z)dz = \left(\int_{z_1}^{z_2} + \int_{z_2}^{z_3} + \int_{z_3}^{z_4} + \int_{z_4}^{z_1} \right) f(z)dz \ ;$$

y expresiones análogas para $I(R_j) := \int_{\partial R_j} f(z)dz$, donde se ha de respetar la concatenación de vértices sucesivos que produzcan la misma orientación de ∂R_j que la de ∂R. Usando las propiedades (7.1) y (7.2) junto con las relaciones (geométricamente evidentes) $z_{13} = (z_2 + z_4)/2 = (z_{34} + z_{12})/2$, entre otras, se obtiene

$$I(R) = I(R_1) + I(R_2) + I(R_3) + I(R_4) \ .$$

Pero, con la desigualdad del triángulo,

$$|I(R)| \leq |I(R_1)| + |I(R_2)| + |I(R_3)| + |I(R_4)| \leq 4 \max\{|I(R_1)|, |I(R_2)|, |I(R_3)|, |I(R_4)|\} \ .$$

El máximo en el miembro derecho de la desigualdad se asume para alguno de los cuatro rectángulos. Si hay más de un rectńgulo con esta propiedad, tomese el mś próximo al vértice z_1 si sigue habiendo más de un rectángulo "maximal" tomese el más próximo al vértice z_2. Esto elige univocamente a uno de los cuatro subrectángulos que llamaremos $R^{(1)}$ tal que:

$$R^{(1)} \subset R \ , \ \ L(R^{(1)}) = L(R)/2 \ , \ \ d(R^{(1)}) = d(R)/2 \ , \ \ 4|I(R^{(1)})| \geq |I(R)| \ .$$

Podemos repetir este procedimiento de cuatrisección con $R^{(1)}$ para obtener un subrectángulo $R^{(2)}$ de $R^{(1)}$ con

$$R^{(2)} \subset R^{(1)} \ , \ \ L(R^{(2)}) = L(R^{(1)})/2 \ , \ \ d(R^{(2)}) = d(R^{(1)})/2 \ , \ \ 4|I(R^{(2)})| \geq |I(R^{(1)})| \ .$$

Repitiendo este proceso n veces, obtenemos un subrectángulo $R^{(n)}$ tal que

$$R^{(n)} \subset R^{(n-1)} \ , \ \ L(R^{(n)}) = 2^{-n} L(R) \ , \ \ d(R^{(n)}) = 2^{-n} d(R) \ , \ \ 4^n |I(R^{(n)})| \geq |I(R)| \ .$$

Por el Lema 1.8, existe $z \in R$ tal que $z \in R^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ya que el tamaño de $R^{(n)}$ tiende a 0, dado cualquier entorno $E \subset R$ de z, hay un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $R^{(n)} \subset E$ para $n \geq n_o$.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Elegimos un entorno $F \subset R$ de z y un $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$R^{(n)} \subset F \ , \text{ y } \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z) \right| \leq (\epsilon/(d(R)L(R)) \text{ para todo } z \neq w \in R^{(n)} \ .$$

Oservando como lo hicimos luego del Teorema 6.4 que

$$\int_{\partial R^{(n)}} dw = \int_{\partial R^{(n)}} w dw = 0 \ ,$$

tenemos

$$I(R^{(n)}) = \int_{\partial R^{(n)}} (f(w) - f(z) - (w - z) f'(z))\, dw \ .$$

Pero entonces

$$\left| I(R^{(n)}) \right| \leq \int_{\partial R^{(n)}} |f(w) - f(z) - (w - z) f'(z)| \ |dw| \leq \int_{\partial R^{(n)}} \frac{\epsilon}{d(R)L(R)} |w - z| |dw| \ .$$

Ahora, para $w \in \partial R^{(n)}$ se tiene $|w - z| \leq d(R^{(n)}) = 2^{-n} d(R)$, con lo que

$$\left| I(R^{(n)}) \right| \leq 2^{-n} \frac{\epsilon}{L(R)} \int_{\partial R^{(n)}} |dw| = 2^{-n} L(R^{(n)}) \epsilon = 4^{-n} \epsilon \ .$$

Luego,

$$|I(R)| \leq 4^n |I(R^{(n)})| \leq \epsilon$$

y esto completa la prueba. XX

Demostración del Teorema de Cauchy-Goursat para un disco: La demostración procede construyendo una primitiva de f y aplicando el Teorema 6.4. Sea D el disco abierto y $z_o \in D$ algún punto que permanecerá fijo. Para $z \in D$ considere el número

$$F(z) = \int_{z_o}^{z_o+\Re(z-z_o)} f(z)dz + \int_{z_o+\Re(z-z_o)}^{z} f(z)dz$$

que se obtiene integrando f a lo largo de, primero el segmento de recta paralelo al eje real desde z_o hasta $z_o+\Re(z-z_o) = \Re(z)+i\Im(z_o)$ y, luego, por el segmento de recta paralelo al eje imaginario desde $z_o+\Re(z-z_o)$ hasta z. El disco tiene la propiedad que para cualquier par de puntos en el estos caminos pertenecen al disco (una elipse, un rectángulo, ... gozan de la misma propiedad).

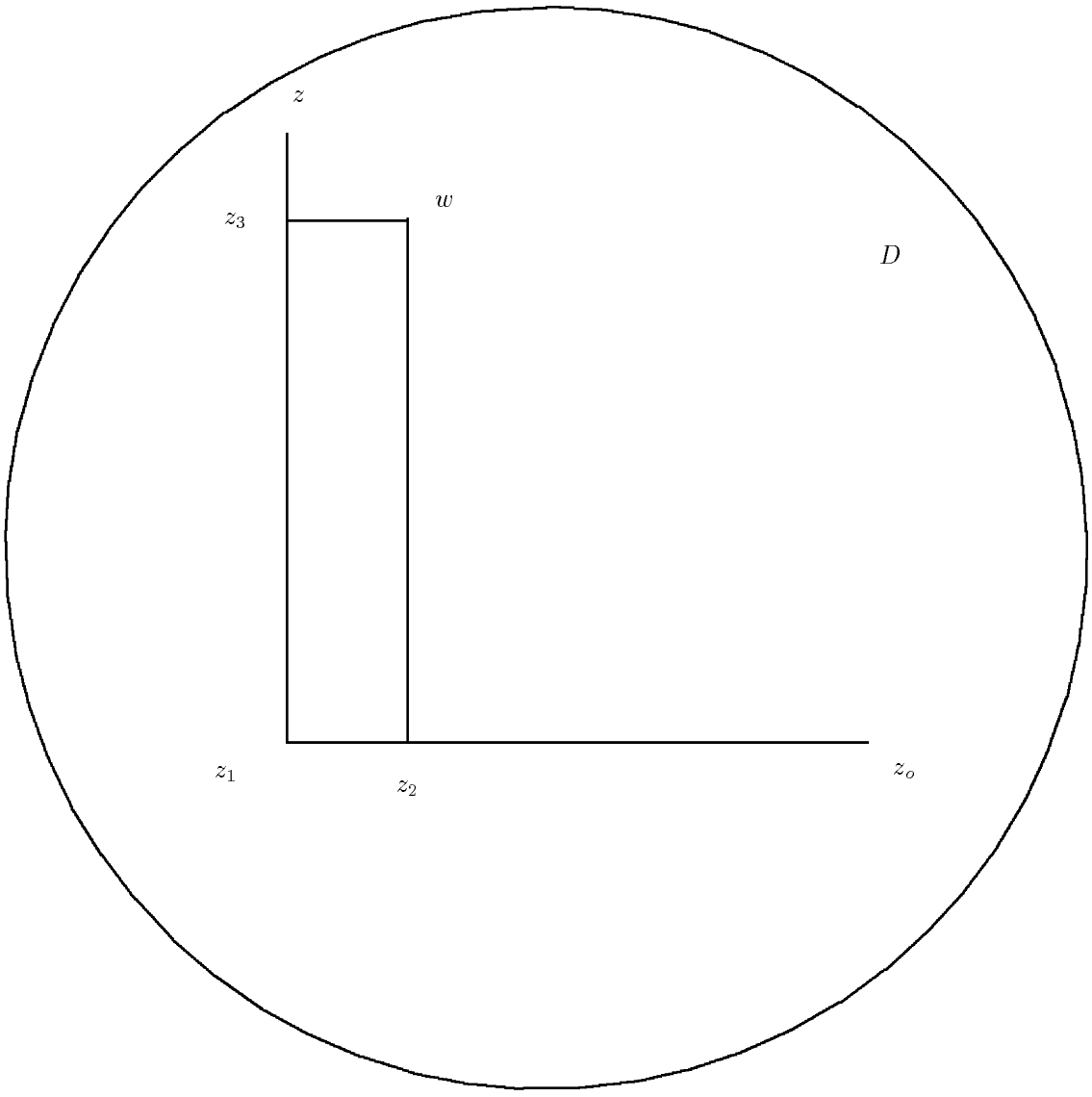


Figura 7.1:

Verificamos que f es la derivada de F con lo que el Teorema 6.4 completa la demostración. Sea $\epsilon > 0$ y E un entorno de z tal que $E \subset D$ y $|f(w) - f(z)| \leq \epsilon/2$ para todo $w \in E$. Considere cualquier $w \in E$ con $w \neq z$ y, además de los puntos z_o y z los puntos (ver figura AAA):

$$z_1 = z_o + \Re(z - z_o)\ ,\ \ z_2 = z_o + \Re(w - z_o)\ ,\ \ z_3 = z_1 + i\Im(w - z_o) = \Re(z) + i\Im(w)\ .$$

Se tiene

$$z_2-z_1=\Re(w-z)\,,\quad w-z_2=i\Im(w-z_o)\,,\quad z_3-w=\Re(z-w)=-(z_2-z_1)\,,\quad z_1-z_3=i\Im(z_o-w)=-(w-z_2)\,,$$

por lo cual z_1, z_2, w y z_3 son vértices sucesivos de un rectángulo (de lados $|\Re(w-z)|$ y $|\Im(w-z_o)|$) comprendido en D. Por el Teorema anterior,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta+\int_{w}^{z_3} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_3}^{z_1} f(\zeta)d\zeta=0\,. \tag{7.3}$$

Los puntos de los dos trios (z_o, z_1, z_2) y (z_1, z_3, z) son colineales; luego, con (7.2)

$$F(w)=\int_{z_o}^{z_2} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta=\int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta\;;$$

$$F(z)=\int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta=\int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_1}^{z_3} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_3}^{z} f(\zeta)d\zeta\,.$$

Luego,

$$F(w)-F(z)=\int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_1}^{z_3} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_3}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

$$=\left(\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_2}^{w} f(\zeta)d\zeta\right)-\int_{z_1}^{z_3} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_3}^{z} f(\zeta)d\zeta\;;$$

y con (7.3) para los sumandos entre paréntesis y (7.1),

$$F(w)-F(z)=\left(-\int_{w}^{z_3} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_3}^{z_1} f(\zeta)d\zeta\right)+\int_{z_3}^{z_1} f(\zeta)d\zeta+\int_{z}^{z_3} f(\zeta)d\zeta=\int_{z_3}^{w} f(\zeta)d\zeta+\int_{z}^{z_3} f(\zeta)d\zeta\,.$$

Con la parametrización explicita de los caminos rectilineos

$$F(w)-F(z)=(w-z_3)\int_0^1 f(z_3+t(w-z_3))dt+(z_3-z)\int_0^1 f(z+t(z_3-z))dt$$

$$=\Re(w-z)\underbrace{\int_0^1 f(z_3+t(w-z_3))dt}_{I_1}+i\Im(w-z)\underbrace{\int_0^1 f(z+t(z_3-z))dt}_{I_2}\,.$$

Usando la identidad

$$f(z)=f(z)\int_0^1 dt\,,$$

obtenemos

$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z}-f(z)=\frac{F(w)-F(z)-(w-z)f(z)}{w-z}=\frac{\Re(w-z)I_1+i\Im(w-z)I_2+(w-z)f(z)\int_0^1 dt}{w-z}$$

$$=\frac{\Re(w-z)}{w-z}(I_1-f(z)\int_0^1 dt)+i\frac{\Im(w-z)}{w-z}(I_2-f(z)\int_0^1 dt)$$

$$=\frac{\Re(w-z)}{w-z}\int_0^1\left[f(z_3+t(w-z_3))-f(z)\right]dt+i\frac{\Im(w-z)}{w-z}\int_0^1\left[f(z+t(z_3-z))-f(z)\right]dt\,.$$

Por la construcción, o bien explicitamente de $z-z_3=i\Im(z-w)$, $z_3-w=\Re(z-w)$, se tiene

$$|z-w|^2=|z-z_3|^2+|w-z_3|^2$$

y esto implica que los segmentos de recta trazados por los dos caminos $\{[0,1]\ni t\mapsto z_3+t(w-z_3)\}$ y $\{[0,1]\ni t\mapsto f(z+t(z_3-z))\}$ está comprendidos dentro de E. Por lo tanto

$$\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z}-f(z)\right|\le\frac{|\Re(w-z)|}{|w-z|}\int_0^1|f(z_3+t(w-z_3))-f(z)|\,dt$$

$$+\frac{|\Im(w-z)|}{|w-z|}\int_0^1|f(z+t(z_3-z))-f(z)|\,dt$$

$$\leq \frac{|\Re(w-z)|}{|w-z|}\int_0^1(\epsilon/2)dt + \frac{|\Im(w-z)|}{|w-z|}\int_0^1(\epsilon/2)dt = (\epsilon/2)\frac{|\Re(w-z)|+|\Im(w-z)|}{|w-z|}\ .$$

Pero las desigualdades $|\Re(w-z)| \leq |w-z|$ y $|\Im(w-z)| \leq |w-z|$ implican que

$$\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| \leq \epsilon\ .$$

XX

Proposición 7.1 *Sean γ_1 y γ_2 dos caminos cerrados simples de la misma orientación tales que: $[\gamma_1]$ y $[\gamma_2]$ están ambos en algún disco; $[\gamma_2]$ está en el dominio D_1 encerrado por γ_1. Sea A el abierto contenido D_1 cuya frontera es $[\gamma_1]\cup[\gamma_2]$. Si f es analítica sobre A y su frontera entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz\ .$$

Un conjunto conexo se llama **simplemente conexo** si no tiene agujeros. Más precisamente $K \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si es conexo y su complemento $\mathbb{C}\setminus K$ es conexo. El siguiente es la versión general del Teorema de Cauchy-Goursat que no demostramos:

Teorema 7.3 *(Teorema de Cauchy-Goursat) Si f es analítica en un dominio simplemente conexo D entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

para todo camino cerrado tal que $[\gamma] \subset D$.

La hipótesis de conectividad simple del dominio es crucial. Piense en la función $z \mapsto 1/z$ en el dominio $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ que no es simplemente conexo; tenemos

$$\int_C z^{-1}dz = 2\pi i$$

para cualquier camino circular cerrado C orientado positivamente.

No usaremos estan versión general en lo que sigue; sin embargo, el alumno podrá (y deberá saber) usarla.

7.2 La representación integral de Cauchy

Teorema 7.4 *(Fórmula de Cauchy) Si f es analítica dentro y sobre un camino cerrado simple γ orientado positivamente, entonces para todo z en el dominio encerrado por γ*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\ . \tag{7.4}$$

Demostración: Sea D el dominio encerrado por γ; para todo $z \in D$ la función $w \mapsto f(w)/(w-z)$ es analítica en $D\setminus\{z\}$ ya que $w \mapsto (w-z)^{-2}(f'(w)(w-z)-f(w))$ es su derivada. Existe $r_o > 0$ tal que el camino circular C_r de radio r está dentro de D para todo $0 < r \leq r_o$, i.e. $[C_r] \subset D$. Por la Proposición 7.1, tenemos

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_{C_r}\frac{f(w)}{w-z}dw\ .$$

Dado $\epsilon > 0$ existe un entorno E de z contenido en D tal que

$$|f(w)-f(z)| \leq \epsilon/(2\pi)$$

para todo $w \in E$ por la continuidad de f. Luego existe $0 < \rho$ tal que $[C_\rho] \subset E$. Como

$$\int_{C_\rho}\frac{1}{w-z}dw = 2\pi i\ ,$$

tenemos

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i f(z) = \int_{C_\rho} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_{C_\rho}\frac{1}{w-z}dw = \int_{C_\rho}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw\ .$$

Luego

$$\left|\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i f(z)\right| \le \int_{C_\rho}\frac{|f(w)-f(z)|}{|w-z|}dw \le \rho^{-1}\int_{C_\rho}(\epsilon/2\pi)|dw| = \epsilon\ .$$

El siguiente resultado técnico es fundamental para lo que sigue; se puede ver como inversión de la fórmula de Cauchy: si una función admite una representación integral como (7.4) con f continua entonces es analítica .

Proposición 7.2 *Sea γ un camino y g una función compleja continua sobre $[\gamma]$. La función*

$$G(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}dz\ \ ,\ \ z \in \mathbb{C}\setminus[\gamma] \tag{7.5}$$

es analítica y tiene derivadas de todo orden analíticas dadas por

$$G^{(n)}(z) = n!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}}dw\quad n \in \mathbb{N}\ . \tag{7.6}$$

Demostración: Si $|\Delta z|$ es lo suficientemente chico como para que $z+\Delta z \notin [\gamma]$,

$$\frac{G(z+\Delta z)-G(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_\gamma\left(\frac{g(s)}{s-z-\Delta z} - \frac{g(s)}{s-z}\right)ds = \int_\gamma \frac{g(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)}ds\ .$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{G(z+\Delta z)-G(z)}{\Delta z} - \int_\gamma \frac{g(s)}{(s-z)^2}ds &= \int_\gamma g(s)\left(\frac{1}{(s-z-\Delta z)(s-z)} - \frac{1}{(s-z)^2}\right)ds\\ &= \Delta z\int_\gamma \frac{g(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}ds\ .\end{aligned}$$

Sea $M := \max_{s\in[\gamma]}|g(s)|$, $d := \min_{s\in[\gamma]}|s-z|$. Entonces, si $\Delta z \le d/2$, $|s-z-\Delta z| \ge |s-z| - |\Delta z| \ge d/2$. Por lo tanto,

$$\left|\frac{g(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}\right| \le 2M/d^3$$

para todo $s\in[\gamma]$, y con esto

$$\left|\frac{G(z+\Delta z)-G(z)}{\Delta z} - \int_\gamma \frac{g(s)}{(s-z)^2}ds\right| \le 2Md^{-3}\Delta z\ell(\gamma)\ ;$$

el miembro derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $\Delta z \to 0$. XX

Teorema 7.5 *Si f es analítica en un disco abierto D entonces todas las derivadas de f existen y son analíticas en ese disco. Se tiene*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw\ ,\ \ n\in\mathbb{N}\ , \tag{7.7}$$

para cualquier $z\in D$ y todo camino cerrado simple γ orientado positivamente tal que $[\gamma]\subset D$ y z pertenezca al dominio encerrado por γ

Demostración: Si $z\in D$ existe un entorno E de z tal que $E\subset D$ y hay un camino círcular $C(z,r)$ tal que $[C(z,r)]\subset E$.

Sea γ un camino cerrado simple que satisface la hipótesis. Por la fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

para todo z en el dominio encerrado por γ; por la Proposición anterior

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

es su n-ésima derivada que es analítica . XX
El siguiente resultado es un corolario inmediato

Teorema 7.6 *Si f es analítica en un abierto todas sus derivadas existen y son analíticas en el abierto.*

Demostración: Si z está en el abierto A donde f es analítica , hay un entorno E de z comprendido en A y el Teorema anterior aplicado a E nos da el resultado. XX

El siguiente corolario completa la demostración del Teorema 2.3.

Corolario 7.1 *Si $f = u + iv$ es analítica en un abierto todas las derivadas parciales de u y de v existen y son continuas.*

Corolario 7.2 *(Cotas de Cauchy) Si f es analítica dentro y sobre un camino cerrado circular $C(z,R)$ de radio $R > 0$ alrededor de z entonces*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{R}\max_{w\in[C(z,R)]}|f(w)|\ ,\quad n\in\mathbb{N}\ . \tag{7.8}$$

Ejercicio 22 *Demuestre el Corolario anterior.*

7.3 Teorema de Morera

Teorema 7.7 *(Teorema de Morera) Si f es continua en un dominio D y $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado γ con $[\gamma] \subset D$ entonces f es analítica en D.*

Demostración: Por el Teorema 6.4 f admite una primitiva en D y es entonces analítica como derivada de una función analítica por el Teorema 7.5. XX

7.4 Ramas del logaritmo y de las potencias

Proposición 7.3 *Sea A un dominio simplemente conexo que no contiene a 0, $z_o \in A$ y $w_o \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(w_o) = z_o$. Para cualquier camino γ que une z_o con $z \in A$ y tal que $[\gamma] \subset A$ el número*

$$f_{z_o,w_o}(z) = w_o + \int_\gamma \frac{dw}{w}$$

no depende de γ y define una rama f_{z_o,w_o} del logaritmo sobre A.

Para todo número complejo $\mu \in \mathbb{C}$ la función

$$\zeta_\mu(z) = \exp(\mu f_{z_o,w_o}(z))\ ,\quad z\in A$$

es una rama de la μ-ésima potencia de z.

8

Series de potencia II

8.1 Serie de Taylor para funciones analíticas

Recordemos que un entorno de un punto es un disco abierto centrado en el punto. El siguiente resultado establece que las funciones analíticas admiten un desarrollo convergente en serie de potencias.

Teorema 8.1 *Si f es analítica en un entorno E de $z_o \in \mathbb{C}$ entonces la serie de Taylor alrededor de z_o*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!}(z-z_o)^n = f(z_o) + f'(z_o)(z-z_o) + \frac{f''(z_o)}{2}(z-z_o)^2 + \frac{f'''(z_o)}{6}(z-z_o)^3 + \cdots \tag{8.1}$$

converge para $z \in E$ y uniformemente en todo disco cerrado alrededor de z_o contenido en E.

Demostración: Como en la demostración del Teorema anterior sobre convergencia de series de potencia, la convergencia en E se desprende de la convergencia uniforme en todo disco cerrado contenido en E.

Sea ρ el radio del entorno, $E = D(z_o; r)$, y $0 < r < \rho$. Sea C el círculo de radio $(r+\rho)/2$ alrededor de z_o orientado positivamente. Por la fórmula de Cauchy,

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw$$

para todo z en el disco cerrado encerrado por C. Usando la identidad (3.2) se obtiene la identidad

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_o}\left(1 + \frac{z-z_o}{w-z_o} + \frac{(z-z_o)^2}{(w-z_o)^2} + \cdots + \frac{(z-z_o)^n}{(w-z_o)^n} + \frac{\frac{(z-z_o)^{n+1}}{(w-z_o)^{n+1}}}{1-\frac{z-z_o}{w-z_o}}\right) ,$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $w \in C$. Insertando esto en la fórmula de Cauchy obtenemos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} (z-z_o)^k \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z_o)^{k+1}} dw \; + \; R_n(z) \, , \tag{8.2}$$

donde el "resto" está dado por

$$R_n(z) = \frac{(z-z_o)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_o)^{n+1}} dw \, .$$

Por la fórmula de Cauchy, la suma en (8.2) coincide con la suma parcial de los primeros $n+1$ términos de la serie de Taylor (8.1). Para completar la demostración, basta ver que el resto R_n puede hacerse tan chico como se quiera independientemente de z con $|z-z_o| \le r$. Para $w \in C$ tenemos $|w-z_o| = (r+\rho)/2$ y $|w-z| = |w-z_o-(z-z_o)| \ge |w-z_o| - |z-z_o| = \frac{r+\rho}{2} - |z-z_o| \ge \frac{r+\rho}{2} - r = \frac{\rho-r}{2}$. Por lo tanto,

$$|R_n(z)| \le \frac{|z-z_o|^{n+1}}{2\pi} \int_C \frac{|f(w)|}{|w-z|\,|w-z_o|^{n+1}} dw$$

$$\le \frac{r^{n+1}}{2\pi\left(\frac{\rho-r}{2}\right)\left(\frac{\rho+r}{2}\right)^{n+1}} \left(\max_{w\in C}|f(w)|\right) 2\pi\frac{\rho+r}{2} = \frac{\rho+r}{\rho-r}\left(\max_{w\in C}|f(w)|\right)\left(\frac{2r}{\rho+r}\right)^{n+1} .$$

El miembro derecho de esta desigualdad es independiente de z y puede hacerse tan chico como se quiera ya que $(\rho+r)/2 > r$, vale decir $2r/(\rho+r) < 1$. XX

Corolario 8.1 *Si f es analítica en un entorno de z_o, las series de Taylor alrededor de z_o de las derivadas de f en el entorno se obtienen derivando sucesivamente la serie de Taylor de f término a término.*

Corolario 8.2 *Si f y g son analíticas en un entorno de z_o las series de Taylor alrededor de z_o de las funciones $f+g$ y $f.g$ se obtienen sumando y multiplicando respectivamente aquellas de f y de g.*

Teorema 8.2 *Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ alrededor de z_o tiene radio de convergencia no nulo y $f(z)$ es su suma, entonces la serie coincide con la serie de Taylor de f alrededor de z_o en el disco de convergencia de la serie.*

Demostración: Sea C un círculo centrado en z_o orientado positivamente y contenido en el disco abierto de convergencia de la serie. Por el Teorema 4, f es analítica en el dominio simplemente conexo encerrado por C. Luego,

$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw\ .$$

Por el Lema 2, la serie se puede integrar término a término dentro de su disco de convergencia. Pero,

$$\int_C \frac{(w-z_o)^k}{(w-z_o)^{n+1}}dw = \begin{cases} 2\pi i & , \quad \text{si } k=n \\ 0 & , \quad \text{si } k\neq n \end{cases} ,$$

por la fórmula de Cauchy aplicada a la función $z \mapsto (z-z_o)^k$ que que tiene primitiva analítica sobre C para $k \neq -1$. El único término de la serie cuyo integral no se anula es el n-ésimo y la integral es $n!a_n$. XX

8.2 Series de Laurent

Si R es al radio de convergencia de una serie de potencias con coeficientes a_n, la serie

$$a_o + \frac{a_1}{z-z_o} + \frac{a_2}{(z-z_o)^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_o)^n}$$

converge fuera de $\overline{D(z_o;1/R)}$, y lo hace uniformemente en y fuera de cualquier círculo de radio mayor a $1/R$, en virtud del Teorema fundamental sobre convergencia de series de potencias. Podemos entonces considerar series de potencias positivas y negativas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_o)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n\ , \tag{8.3}$$

con coeficientes complejos a_n ($\pm n \in \mathbb{N}$) centrada en $z_o \in \mathbb{C}$. Una serie de este tipo se llama **serie de Laurent**. La serie formada por los coeficientes de indice negativo es convergente fuera de un círculo de radio R_1 igual al reciproco del radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}(z-z_o)^{-n}$. La serie formada por los coeficientes positivos es convergente dentro de un disco abierto de radio R_2. Si $R_1 < R_2$, la serie (8.3) converge en el anillo abierto de radio interior R_1 y de radio exterior R_2 alrededor de z_o (llamado **anillo de convergencia**): $\{z \in \mathbb{C} :\ R_1 < |z-z_o| < R_2\}$, y la convergencia es uniforme en cualquier anillo cerrado contenido en el anillo de convergencia. En su anillo de convergencia la serie define una función analítica, cuyas derivadas se obtienen derivando término a término. Observese que si el radio interior del anillo es 0 este es simplemente un disco abierto con radio igual al radio exterior R_2 pero pinchado en z_o. i.e., $D^o(z_o;R_2)$.

Teorema 8.3 *Si f es analítica en un anillo abierto A centrado en z_o, entonces f admite un desarrollo único en serie de Laurent alrededor de z_o (8.3) convergente en el anillo y uniformemente convergente en todo anillo cerrado contenido en A; con coeficientes*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_o)^{n+1}}dw\ , \quad \pm n \in \mathbb{N}\ , \tag{8.4}$$

donde C es cualquier camino cerrado simple orientado postivamente contenido en A que encierre a z_o.

Demostración: Sean r y R el radio interior y exterior respectivamente del anillo abierto A ($r < R$). Considere cualquier anillo cerrado $B := \{z \in \mathbb{C} :\ \rho_1 \leq |z-z_o| \leq \rho_2\}$ contenido en el anillo abierto A, con $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Considere los círculos $C_1 := \{z \in A :\ |z-z_o| = (r+\rho_1)/2\}$ orientado negativamente

y $C_2 := \{z \in A : \ |z - z_o| = (R + \rho_2)/2\}$ orientado positivamente, ambos contenidos en A. Sea $z \in B$ entonces z está fuera de C_1 y dentro de C_2. Considere los caminos cerrados y simples Γ y γ

Ya que $\Gamma \subset A$ y z queda dentro de Γ, la fórmula de Cauchy produce

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \ .$$

Ya que $\gamma \subset A$, z queda fuera de γ y por ende $w \mapsto f(w)/(w - z)$ es analítica dentro y sobre γ, el Teorema de Cauchy garantiza que

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = 0 \ .$$

Luego,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \ ;$$

pero en esta integral la contribución de los dos segmentos rectos comunes a Γ y a γ se anula ya que estos son recorridos dos veces en direcciones opuestas. Por lo tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw \ + \ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw \ \ , \quad z \in B \ .$$

Ya que z queda dentro de C_2, procediendo de la misma manera que en la demostración del teorema sobre el desarrollo en serie de Taylor, obtenemos

$$f_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

con coeficientes

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z_o)^{n+1}} dw \tag{8.5}$$

y donde la serie es uniformemente convergente para $z \in A$ con $|z - z_o| \leq \rho_2$. Pasamos a la otra integral sobre C_1. Usando la identidad (3.2), tenemos

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z - z_o} \left(1 + \frac{w - z_o}{z - z_o} + \frac{(w - z_o)^2}{(z - z_o)^2} + \cdots + \frac{(w - z_o)^k}{(z - z_o)^k} + \frac{\frac{(w-z_o)^{k+1}}{(z-z_o)^{k+1}}}{1 - \frac{w-z_o}{z-z_o}} \right) \ ,$$

para todo $w \in C_1$ y cualquier natural k. Insertando esta identidad en la integral sobre C_1, obtenemos

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1} f(w)(w-z_o)^n\,dw\right)(z-z_o)^{-n-1} + R_k(z)$$

$$= \sum_{n=1}^{k+1} a_{-n}(z-z_o)^{-n} + R_k(z)\ ,$$

con coeficientes

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1} \frac{f(w)}{(w-z_o)^{-n+1}}dw \quad , \quad n = 1, 2, \cdots\ , \tag{8.6}$$

y donde el "resto" es

$$R_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1} \frac{f(w)(w-z_o)^{k+1}}{(w-z)(z-z_o)^{k+1}}dw\ .$$

Ya que $|z-z_o| \geq \rho_1$, y $|w-z_o| = (r+\rho_1)/2$ para $w \in C_1$, se tiene $|w-z| = |w-z_o-(z-z_o)| \geq |z-z_o| - |w-z_o| \geq \rho_1 - (r+\rho_1)/2 = (\rho_1 - r)/2$. Luego, como en la demostración del desarrollo de Taylor,

$$|R_k(z)| \leq \frac{\rho_1 + r}{\rho_1 - r}\left(\max_{w\in C_1}|f(w)|\right)\left(\frac{\rho_1+r}{2\rho_1}\right)^{k+1}$$

que converge a 0 para $k \to \infty$ pues $(\rho_1 + r)/(2\rho_1) < 1$. Luego, la serie obtenida para f_1 es uniformemente convergente para todo $z \in A$ con $|z-z_o| \geq \rho_1$.

Para completar la demostración, observamos que las expresiones (8.5) y (8.6) para los coeficientes son independientes del camino cerrado simple de integración siempre que este contenido en A, encierre a z_o y este orientado positivamente (como lo estan $-C_1$ y C_2). La unicidad de la serie, o sea de los coeficientes se verifica simplemente igual que en el Teorema 5. XX

Una variante del Teorema recién demostrado es:

Teorema 8.4 *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_o)^{-n}$ dos series con las propiedades siguientes: 1) la primera serie converge en un disco abierto de radio R alrededor de z_o; 2) la segunda serie converge fuera del disco cerrado de radio r alrededor de z_o; y 3) $r < R$. Entonces, existe una función f analítica en el anillo abierto de radio interior r y radio exterior R cuyo desarrollo de Laurent coincide con $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$.*

Este resultado garantiza que una serie de tipo (8.3) es la serie de Laurent de su suma en su anillo de convergencia.

9

Algunos Resultados Fundamentales

9.1 Analiticidad de límites uniformes

Teorema 9.1 *Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto Ω que convergen uniformemente a f en Ω. Entonces f es analítica en Ω.*

Demostración: Sea $z \in \Omega$ y E un entorno de z contenido en Ω. Para todo camino cerrado γ con $[\gamma] \subset E$, se tiene, usando el Teorema 6.5, $\int_\gamma f(z) = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = 0$. Por el Teorema de Morera, f es analítica en E, luego analítica en Ω. XX

9.2 Teorema de Liouville

Teorema 9.2 *Si f es entera y acotada entonces es constante.*

Ejercicio 23 *Usando la cota de Cauchy para f' (Corolario 7.2) y el Teroema 2.4, demuestre el Teorema de Liouville.*

9.2.1 Aplicación: Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema 9.3 *Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_o$ con coeficientes complejos y de grado $n \geq 1$ ($a_n \neq 0$) tiene n raices $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ contando multiplicidades y*

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) .$$

Demostración: Podemos escribir

$$P(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}z^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}z^{-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}z^{-(n-1)} + \frac{a_o}{a_n}z^{-n}\right) .$$

Ya que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}z^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}z^{-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}z^{-(n-1)} + \frac{a_o}{a_n}z^{-n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|\,|z|} + \frac{|a_{n-2}|}{|a_n|\,|z|^2} + \cdots + \frac{|a_1|}{|a_n|\,|z|^{n-1}} + \frac{|a_o|}{|a_n|\,|z|^n}$$

y el miembro derecho de la desigualdad tiende a 0 para $|z| \to \infty$, deducimos que $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$.

Suponga que P no tiene raices, entonces $f(z) = 1/P(z)$ es entera. Elejimos $C_1 > 0$ y por lo antedicho existe $R > 0$ tal que $|P(z)| \geq C_1$ para todo z con $z > R$. Luego $|f(z)| \leq (1/C_1)$ para todo z fuera del disco cerrado $\overline{D(0,R)}$. Pero este disco es acotado y cerrado con lo que el AAAA indica que f es acotada sobre él, i.e. existe $C_2 > 0$ tal que $|f(z)| \leq C_2$ para todo $z \in \overline{D(0,R)}$. Por lo tanto $|f(z)| \leq \max\{C_2, 1/C_1\}$ es acotada. Por el Teorema de Liouville f, luego P, son constantes lo que contradice la hipótesis $a_n \neq 0$. Por lo tanto existe una raiz z_1. Entonces,

$$P(z) = a_n(z - z_1)P_1(z)$$

donde el polinomio P_1 tiene grado $n-1$ y el correspondiente coeficiente es 1. Aplicando el argumento a P_1 obtenemos una raiz z_2 de P_1 y

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)P_2(z) ,$$

donde P_2 tiene grado $n-2$ con correspondiente coeficiente igual a 1.

Repitiendo este procedimiento llegamos a una $(n-1)$-ésima raiz z_{n-1} donde el polinomio "restante" P_{n-1} es de grado 1: $P_{n-1}(z) = z - z_n$. esto completa le demostración. XX

9.3 El Principio del Módulo Máximo

Lema 9.1 *Si f es analítica en un entorno E de z_o y $|f(z)| \leq |f(z_o)|$ para todo $z \in E$ entonces f es constante en E.*

Demostración: Considere el camino circular $C(z_o, r)$ donde r es lo suficientemente chico como para que $[C(z_o, r)] \subset E$. Se tiene

$$f(z_o) = (2\pi i)^{-1} \int_{C(z_o,r)} \frac{f(w)}{w - z_o} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(z_o + re^{it}) dt \, ;$$

luego

$$|f(z_o)| \leq (2\pi)^1 \int_0^{2\pi} |f(z_o + re^{it})| dt \leq (2\pi)^{-1} |f(z_o)| \int_0^{2\pi} dt = |f(z_o)| \, ;$$

o sea que

$$|f(z_o)| = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(z_o + re^{it})| dt \, ,$$

o lo que es lo mismo

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \left(|f(z_o)| - |f(z_o + re^{it})| \right) dt \, .$$

En esta última integral el integrando es no negativo y una función continua de $t \in [0, 2\pi]$, luego por el Lema 6.2, $|f(z_o)| = |f(z_o + re^{it}|$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Como $r > 0$ es arbitrario sujeto a que $[C(z_o, r)] \in E$, deducimos que $z \mapsto |f(z)|$ es constante en E. Luego, por el Teorema 2.4 f es constante. XX

Teorema 9.4 *(Principio del Módulo Máximo)*

1. *Si f es analítica en un dominio D y no es constante entonces $D \ni z \mapsto |f(z)|$ no admite un máximo: no existe $z_o \in D$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_o)|$ para todo $z \in D$;*

2. *Si f es analítica en un abierto acotado $G \subset \mathbb{C}$ y continua sobre la frontera de G entonces el valor máximo de $|f|$ sobre el cierre de G se asume en la frontera ∂G de G:*

$$\sup_{z \in G} |f(z)| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)| > f(w) \, , \quad \text{para todo } w \in G \, .$$

Demostración:

1. El conjunto $\mathcal{A} = \{z \in D : |f(z)| = |f(z_o)|\}$ no es vacio. La continuidad de f implica que $\mathcal{B} = \{z \in D : |f(z)| < |f(z_o)|\}$ es abierto y desde luego $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ y $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = D$. Si logramos demostrar que $\mathcal{A}$ es abierto, entonces el hecho de que D es conexo implica que $\mathcal{B} = \emptyset$ y luego, por el Teorema 2.4 f es constante.

   Si $w \in \mathcal{A}$ y E es un entorno de w contenido en D entonces, para todo $z \in E$, se tiene $|f(z)| \leq |f(z_o)| = |f(w)|$ y por el lema $E \subset \mathcal{A}$ con lo que $\mathcal{A}$ es abierto. esto completa la demostración.

2. La afirmación es inmediata si G es un dominio. Como hemos observado luego del Teorema 6.4, todo abierto es unión denumerable de dominios disjuntos dos-a-dos. XX

9.4 Ceros

Un **cero** de una función analítica es un punto z_o donde f es analítica y donde $f(z_o) = 0$. Si E es un entorno del cero donde f es analítica, tenemos el desarrollo de Taylor alrededor de z_o

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z - z_o)^n \, , \quad z \in E \, ,$$

y si f no se anula identicamente en E, se tiene $f^{(m)}(z_o) \neq 0$ para un $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ que es el menor número natural con esta propiedad. Entonces,

$$f(z) = (z - z_o)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(z_o)}{(n+m)!}(z - z_o)^n \quad , \quad z \in E \ ,$$

donde la serie converge en E y converge uniformemente en todo disco cerrado centrado en z_o contenido en E. Si $g(z)$ denota su suma, g es analítica en E por el Teorema 4. Además, $g(z_o) = f^{(m)}(z_o)/m! \neq 0$. Luego,

$$f(z) = (z - z_o)^m g(z) \quad , \quad z \in E \ ,$$

con g analítica y $g(z_o) \neq 0$. El número m ($m \geq 1$) se llama el **orden** del cero. Esto demuestra la mitad no trivial del siguiente resultado:

Teorema 9.5 *Si f es analítica en un entorno de z_o donde no se anula identicamente, entonces z_o es un cero de f si y solo si $f(z) = (z - z_o)^m g(z)$ para un $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$, y una función g analítica en el entorno con $g(z_o) \neq 0$.*

El siguiente resultado indica que los ceros de una función analítica no constante son aislados:

Corolario 9.1 *Si f es analítica en un entorno de z_o donde f no se anula identicamente, y z_o es un cero de f, entonces f no tiene otros ceros que z_o en un algún entorno de z_o.*

Demostración: Sea m el orden del cero y $f(z) = (z - z_o)^m g(z)$ con g analítica y $g(z_o) \neq 0$. Como g es analítica y por ende continua en el entorno, existe algún entorno E contenido en el entorno original tal que $g(z) \neq 0$ para $z \in E$. Luego $f(z) = (z - z_o)^m g(z)$ solo se anula en $z = z_o$ en E. □

Teorema 9.6 *Si f es analítica en un dominio Ω entonces $C_f := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ es todo Ω o no tiene puntos de acumulación en Ω (y es discreto y denumerable).*

Demostración: Si $z_o \in C_f$ los resultados anteriores implican que para cualquier entorno E de z_o contenido en Ω hay dos alternativas: 1) f se anula en E; 2) existe un entorno E' contenido en E tal que z_o es el único cero de f en E'.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de puntos de acumulación de C_f. Recordamos que $w \in \mathcal{A}$ quiere decir que en todo entorno de w contenido en Ω hay infinitos puntos de C_f. A fortiori, $w \in C_f$ pues la continuidad de f indica que dado $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ con $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ para todo z con $|z - w| < \delta$; tomando z como uno de los (infinitos) ceros de f en el entorno de radio δ de w, vemos que $|f(w)| < \epsilon$, y por ende $f(w) = 0$.

Entonces, si $w \in \mathcal{A}$, $w \in C_f$ y la alternativa 2) no se puede dar ya que en todo entorno de w hay ceros de f distintos de w. Luego, f se anula en todo entorno E de w contenido en Ω o sea que $E \subset C_f$ y por ende $E \subset \mathcal{A}$ y esto significa que $\mathcal{A}$ es abierto.

Por otro lado, $\mathcal{A}$ es cerrado ya que para cualquier sucesión $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{A}$ que converge a $w \in \Omega$ se tiene que todo entorno F de w contenido en Ω contiene también infinitos ceros de f - pues F contiene un entorno de un w_n que es un punto de acumulación– o sea $w \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\Omega \setminus \mathcal{A}$ es abierto.

Luego, $\Omega = \mathcal{A} \cup (\Omega \setminus \mathcal{A})$ y ambos conjuntos son abiertos y no se intersectan. Ya que un dominio es conexo, tenemos $\mathcal{A} = \Omega$ o bien $\mathcal{A} = \emptyset$.

Cuando $\mathcal{A}$ es vacio, C_f es discreto y denumerable; esta es una propiedad general que no demostraremos aqui.

Corolario 9.2 *Si f y g son analíticas en un dominio Ω y $f = g$ en un subconjunto Ω_o de Ω que tiene un punto de acumulación en Ω entonces $f = g$ en Ω.*

Es notable que el orden de un cero de una función analítica es un número natural. La función $z \mapsto z^{1/2}$ tiene un cero en 0 pero como esta función no es analítica en 0, el orden no está definido.

9.5 Singularidades de funciones analíticas

Una **singularidad aislada** de una función f es un punto z_o tal que f es analítica en todos los puntos de algún entorno de z_o salvo en z_o. En tal caso f admite un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

en un disco pinchado $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_o| < \rho\}$. Se dice que la singularidad aislada z_o es: **removible** si $a_n = 0$ para todo $n < 0$; un **polo de orden m** si $a_{-m} \neq 0$ pero $a_k = 0$ para todo $k < -m$; una **singularidad esencial** si $a_n \neq 0$ para un número infinito de valores negativos de n.

Analizamos los tres tipos de singularidades aisladas.

1. Si la singularidad z_o es removible, se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

en el entorno salvo para $z = z_o$. La serie infinita del miembro derecho de la igualdad converge uniformemente en todo el entorno y define una función analítica $g(z)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo z en el entorno exceptuando z_o. De aqui el nombre de removible, ya que reemplazando f por g tenemos una función analítica idéntica salvo en z_o.

Proposición 9.1 *Si la función f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_o| < \rho\}$, z_o es una singularidad removible si y solo si $\lim_{z \to z_o} f(z)$ existe.*

Demostración: La necesidad es evidente. Por otro lado, si $\lim_{z \to z_o} f(z) =: a$ existe, entonces $|f(z)|$ es acotada en un entorno de z_o. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|a - f(z)| < \epsilon$ para todo z en el disco pinchado con $|z - z_o| \leq \delta$, y entonces $|f(z)| - |a| \leq |a - f(z)|$ implica que $|f(z)| \leq |a| + \epsilon$. Tomando un círculo C_r orientado positivamente alrededor de z_o de radio r inferior a δ tenemos por (8.4)

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z)(z - z_o)^{n-1} \quad , \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Luego,

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi}(|a| + \epsilon) r^{n-1} (2\pi r) = (|a| + \epsilon) r^n ,$$

y tomando el límite $r \to 0$, obtenemos $a_{-n} = 0$ para $n = 1, 2, \cdots$. □

2. Pasemos ahora a los polos.

Proposición 9.2 *Si f es analítica en $D := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_o| < \rho\}$, entonces $\lim_{z \to z_o} |f(z)| = \infty$ si y solo si existe un número natural m no nulo y una función analítica g en el disco abierto de radio ρ alrededor de z_o tal que $g(z_o) \neq 0$ y $f(z) = (z - z_o)^{-m} g(z)$ para todo $z \in D$.*

Demostración: Si f admite la representación indicada, se tiene $\lim_{z \to z_o} |f(z)| = \infty$. Veamos la suficiencia de esta representación. Existe $\rho' > 0$ tal que f no tiene ceros en $B' := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_o| < \rho'\}$. La función $h(z) := 1/f(z)$ es analítica en B' y $\lim_{z \to z_o} h(z) = 0$ con lo cual z_o es una singularidad removible de h y la función $\widetilde{h}(z) = h(z)$, $z \in B'$, $\widetilde{h}(z_o) = 0$, es analítica en $C := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| < \rho'\}$. Luego existe $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$, y una función q analítica en C con $q(z_o) \neq 0$ tal que $\widetilde{h}(z) = (z - z_o)^m q(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces, para $z \in B'$ se tiene $f(z) = 1/h(z) = 1/\widetilde{h}(z) = (z - z_o)^{-m}(1/q(z))$. La función g definida como $1/q$ en B', y por $(z - z_o)^m f(z)$ en $B \setminus B'$ cumple con los requisitos. □

Si f tiene un polo de orden m la parte de la serie de Laurent con coeficientes negativos $a_{-m}(z - z_o)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_o)^{-m+1} + \cdots + a_{-1}(z - z_o)^{-1}$ se denomina **la parte singular** de f en z_o.

3. Pasamos a considerar un ejemplo de una singularidad esencial. Considere la función $z \mapsto \exp(1/z)$, para $z \neq 0$. Se tiene $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} (1/n!) z^{-n}$ y esta es la serie de Laurent (en virtud de la unicidad). $z = 0$ es por ende una singularidad esencial. Sea c un número complejo no nulo arbitario y $\epsilon > 0$. Considerando $log(c) = \log|c| + iArg(c) + i2k\pi$ podemos elegir al entero k tal que el valor w de $log(c)$ asociado satisfaga $|w| > 1/\epsilon$. Poniendo $z_o = 1/w$, tenemos $|z_o| < \epsilon$ y $e^{1/z_o} = c$. ¡En todo entorno de 0, la función $e^{1/z}$ toma el valor c donde c no nulo es arbitrario! Este hecho notable no es particular a la función considerada sino que es característico para una singularidad esencial. El Teorema de Picard dice que en cualquier entorno de una singularidad esencial la función asume todos los números complejos con la posible excepción de uno solo. Una versión mas débil es la siguiente

Teorema 9.7 (Casorati-Weierstraß) *Si f es analítica en $E = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_o| < \rho\}$ y z_o es una singularidad esencial de f, entonces dado cualquier número complejo c, $\epsilon > 0$, y $0 < \delta \leq \rho$, existe $z \in \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_o| < \delta\}$ con $|f(z) - c| < \epsilon$.*

Demostración: Supongamos que la afirmación es falsa. O sea hay un número complejo c, un $\epsilon > 0$, y $0 < \delta \leq \rho$ tales que $|f(z) - c| \geq \epsilon$ para todo z con $0 < |z - z_o| < \delta$. Entonces $\lim_{z \to z-o} |(f(z) - c)/(z - z_o)| = \infty$, por lo cual la función $z \mapsto (f(z) - c)/(z - z_o)$ tiene un polo en z_o. Si m es el orden del polo, $\lim_{z \to z_o} (z - z_o)^{m+1}(f(z) - c) = 0$. Luego $|z - z_o|^{m+1}|f(z)||c| \leq |z - z_o|^{m+1}(|f(z) - c| + |c|)$ implica que $\lim_{z \to z_o} (z - z_o)^{m+1} f(z) = 0$. Pero esto indica que $z \mapsto (z - z_o)^m f(z)$ tiene una singularidad removible en z_o contradiciendo la hipótesis. □

Los resultados obtenidos o por lo menos mencionados se resumen en el siguiente:

Teorema 9.8 *Si f tiene una singularidad aislada en z_o entonces se tienen la siguientes equivalencias:*

1. *z_o es removible $\iff \lim_{z\to z_o} f(z)$ existe $\iff$ hay una función g analítica en z_o que coincide con f fuera de z_o;*
2. *z_o es un polo $\iff \lim_{z\to z_o} |f(z)| = \infty \iff f(z) = g(z)/(z-z_o)^m$ para $m > 0$ y una función g analítica en z_o con $g(z_o) \neq 0$;*
3. *z_o es una singularidad esencial $\iff |f(z)|$ no es acotado cerca de z_o ni converge a ∞ cuando $z \to z_o$ $\iff$ los valores de $f(z)$ son todos los números complejos con la posible excepción de uno.*

9.6 El Principio del Argumento

FALTA

9.6.1 Teorema de Rouché-Glicksberg

Teorema 9.9 *(Teorema de Rouché-Glicksberg) Si f y g son analíticas dentro y sobre un camino cerrado simple Γ y $|f(z)| + |g(z)| > |f(z) - g(z)|$ para todo $z \in [\Gamma]$, entonces f y g no tienen ceros en $[\Gamma]$ y tienen la misma cantidad de ceros (contando multiplicidad) dentro de Γ.*

Demostración: La desigualdad estricta implica que f y g no tienen ceros en $[\Gamma]$. Sean C_f y C_g el número de ceros de f y de g dentro de Γ respectivamente. Tenemos, ya que ni f ni g tienen polos,

$$(1/2\pi i)\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = C_f \quad , \quad (1/2\pi i)\int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = C_g \ .$$

Sea $h(z) = f(z)/g(z)$ que no tiene polos ni ceros en $[\Gamma]$. Para un $z_o \in [\Gamma]$ dado, sea $w = h(z_o)$ entonces $f(z_o) = wg(z_o)$ y por ende $(|w|+1)\cdot|g(z_o)| = |f(z_o)| + |g(z_o)| > |f(z_o) - g(z_o)| = |w-1|\cdot|g(z_o)|$. Como $g(z_o) \neq 0$, concluimos que $|w|+1 > |w-1|$ o, lo que es lo mismo, $-Re(w) < |w|$. Esto implica que w no es un número real menor o igual que 0. La imagen de $[\Gamma]$ bajo h está contendida en el dominio de analiticidad de la rama principal del logaritmo. Por lo tanto, con $z \mapsto \ell(z) := Log(h(z))$, se tiene $\ell'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}$ para $z \in [\Gamma]$. Luego,

$$C_f - C_g = (1/2\pi i)\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz - (1/2\pi i)\int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

$$= (1/2\pi i)\int_\Gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right)dz = (1/2\pi i)\int_\Gamma \ell'(z)dz = 0 \ .$$

La desiguladad esticta no se puede relajar a $|f(z)| + |g(z)| \geq |f(z) - g(z)|$ como se ve tomando $g \equiv 0$.

El Teorema de Rouché clásico está formulado con la hipótesis $|f(z)| > |f(z) - g(z)|$ que es más fuerte ya que ella implica que $|g(z)| \neq 0$ y por ende $|f(z)| + |g(z)| > |f(z)|$. En muchisimas aplicaciones, basta esta hipótesis clásica.

Aplicación 1: ¿ Soluciones de $f(z) = z$ (puntos fijos)?

1. Sea f analítica en $\overline{D(0;R)}$ y suponga que $|f(z)| > R$ sobre la frontera o sea el círculo. Poniendo $g(z) = f(z) - z$, tenemos $|f(z)| > R = |g(z) - f(z)|$ sobre el círculo y por lo tanto hay tantos puntos fijos $f(z) = z$ en $D(0;R)$ como ceros tiene alli f.
2. Sea f analítica en $\overline{D(0;R)}$ y suponga que $|f(z)| < R$ sobre la frontera de $D(0;R)$, o sea sobre el círculo. Entonces con $h(z) = -z$ y $g(z) = f(z) + h(z)$ tenemos $|h(z)| = R > |f(z)| = |g(z) - h(z)|$ sobre el círculo y luego g tiene tantos ceros como h en $D(0;R)$. Pero 0 es el único cero de h en este disco. Por lo tanto $f(z) = z$ tiene una única solución en este disco.

Aplicación 2: ¿ Ceros de f ?

Suponga que f es analítica dentro y sobre en un camino cerrado simple Γ, que z_o está dentro del dominio cuya frontera es $[\Gamma]$ y que para $z \in [\Gamma]$, $|f(z)| > |f(z_o)|$, entonces con $g(z) = f(z) - f(z_o)$ se tiene $|f(z)| > |g(z) - f(z)|$ sobre $[\Gamma]$ con lo cual f tiene a lo menos un cero en el dominio encerrado por Γ ya que $g(z_o) = 0$.

10

Residuos

Considere una función f con una singularidad aislada en z_o, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ su serie de Laurent alrededor de z_o, y Γ un camino cerrado simple que encierra a la singularidad. La serie de Laurent se puede integrar término a término en virtud de su convergencia uniforme con lo cual

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_\Gamma (z-z_o)^n dz \ .$$

La única integral que no se anula corresponde a $n=-1$ (su valor es $2\pi i$) ya que las demás se anulan en virtud de que $(z-z_o)^n$ tiene una primitiva fuera de z_o para $n \neq 1$ y Γ es cerrado. Luego,

$$\int_\Gamma f(z) = 2\pi i a_{-1} \ .$$

Si f tiene una singularidad aislada en z_o se llama **residuo de f en z_o**, anotado $Res(f;z_o)$ al coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent de f alrededor de z_o. Si la singularidad aislada es removible, su residuo se anula. Si z_o es un polo de orden m, entonces $f(z) = (z-z_o)^{-m}g(z)$ con g analítica en un entorno de z_o. En tal caso es inmediato verificar que el residuo es igual a $(1/(m-1)!)g^{(m-1)}(z_o)$, o sea: si z_o es un polo de orden m de f

$$\boxed{Res(f;z_o) = \lim_{z\to z_o} \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_o)^m f(z)\right]\right)} \ . \tag{10.1}$$

Si, por ejemplo, f es analítica en z_o y g tiene un cero de orden 1 en z_o entonces f/g tiene un polo de orden 1 en z_o y

$$\boxed{Res(f/g;z_o) = f(z_o)/g'(z_o)} \ .$$

Esto se desprende de la aplicación de la fórmula (10.1) con $m=1$, y del hecho que $g(z) = g'(z_o)(z-z_o)+h(z)$ con $h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} g^{(n)}(z_o)(z-z_o)^n$ y $g'(z_o) \neq 0$:

$$Res(f/g;z_o) = \lim_{z\to z_o}(z-z_o)\frac{f(z)}{g'(z_o)(z-z_o)+h(z)} = \lim_{z\to z_o}\frac{f(z)}{g'(z_o)+[h(z)/(z-z_o)]} = \frac{f(z_o)}{g'(z_o)} \ .$$

De manera análoga se obtiene, en el caso en que g tiene un cero de orden 2 en z_o la fórmula (se tiene entonces $g''(z_o) \neq 0$):

$$\boxed{Res(f/g;z_o) = \frac{2f'(z_o)}{g''(z_o)} - \frac{2f(z_o)g'''(z_o)}{3(g''(z_o))^2}} \ .$$

Ejercicio 24 *Determine los residuos de las siguientes funciones en sus respectivas singularidades:*

$$\tanh(z) \ , \quad e^{z+(1/z)} \ , \quad (Log(z))^n/(z^2+1) \ , \quad e^{az}/(1+e^{bz}) \text{ con } a,b \text{ reales} \ .$$

El siguiente resultado es sumamente útil para calcular integrales reales como veremos

Teorema 10.1 (Teorema de los residuos) *Si Γ es un camino cerrado simple orientado positivamente y f es analítica dentro y sobre Γ excepto en finitos puntos $z_1, z_2, \cdots, z_n$ que se encuentran dentro del dominio encerrado por Γ,*

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f;z_j)} \ . \tag{10.2}$$

Demostración: Sean h_k las partes singulares de f en z_k, $k=1,2,\cdots,n$. La función $g = f - h_1 - h_2 - \cdots - h_n$, tiene singularidades removibles en cada uno de los n puntos $z_1, z_2, \cdots, z_n$. ¿Porque? En un entorno pinchado de z_k lo suficientemente pequeño se tiene:

- $f(z) = h_k(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(z - z_k)^n$ donde la serie es la parte no singular de la serie de Laurent de f alrededor de z_k que es convergente en el entorno completo (i.e., inclusive en $z = z_k$). Luego $\lim_{z\to z_k}(f(z) - h_k(z)) = a_0^{(k)}$.

- Para todo $\ell \in \{1, 2, \cdots, n\}$ con $\ell \neq k$, $h_\ell(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(\ell)}(z - z_\ell)^{-j}$ donde la serie converge uniformemente en el entorno completo y es analítica en el. Esto se debe a que la parte singular h_ℓ de la serie de Laurent de f alrededor de z_ℓ converge uniformemente fuera de cualquier disco de radio no nulo alrededor de z_ℓ.

Por lo tanto, $\lim_{z\to z_k} g(z) = a_0^{(k)} + \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} h_j(z_k)$. Ya que las singularidades de g en $z_1, z_2, \cdots, z_n$ son removibles y no están sobre Γ, se tiene

$$0 = \int_\Gamma g(z)dz = \int_\Gamma f(z) - \sum_{k=1}^{n}\int_\Gamma h_k(z)dz \ .$$

Pero, $\int_\Gamma h_k(z)dz = 2\pi i Res(h_k, z_k) = 2\pi i Res(f, z_k)$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n$ y esto completa la demostración. XX

Otra variante: Sea D el dominio encerrado por Γ. Construya n círculos C_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, de modo que: cada C_k este orientado negativamente, centrado en z_k y los n círculos no se tocan entre si y están dentro de D. Una Γ al círculo C_1 por medio de una poligonal γ_1 en D que no toca ninguno de los demás círculos; luego una C_1 a C_2 por medio de una poligonal γ_2 en D que no toque a ninguno de los demas círculos; etc., etc., por fin una C_n a Γ por medio de un segmento de recta γ_n en D que no toque a ninguno de los demas círculos. Convenzase de que esta construcción es posible de tal manera que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ donde Γ_1 y Γ_2 son caminos cerrados simples orientados positivamente armados a partir de Γ, los círculos C_k y las poligonales γ_k, de tal modo que ni Γ_1 ni Γ_2 encierran algún z_k. Luego, verifique que

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)dz \ .$$

Por último, observe que $\int_{C_k} f(z)dz = -2\pi i Res(f, z_k)$.

INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SOBRE $[0, 2\pi]$

Considere la integral

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{F}(\cos(\phi), \sin(\phi))d\phi \tag{10.3}$$

donde $\widetilde{F}$ es una función racional de dos variables (reales en el intervalo $[-1, 1]$). Definiendo $z = e^{i\phi}$, tenemos

$$\cos(\phi) = (z + z^{-1})/2 \ , \quad \sin(\phi) = (z - z^{-1})/(2i) \ ,$$

con lo que la integral se transforma en

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(\phi), \sin(\phi))d\phi = \ -i \int_{\{z\in\mathbb{C}:\, |z|=1\}} F(z)dz \ ,$$

donde

$$F(z) := z^{-1}\widetilde{F}\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \ .$$

La función F es racional y si tiene singularidades estas son aisladas y removibles o bien polos. Por el teorema de los residuos,

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{F}(\cos(\phi), \sin(\phi)) = 2\pi \sum Res(F; z_k) \ ,$$

donde la suma es sobre los polos z_k de F dentro del círculo de radio 1.

INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIONES SOBRE LA RECTA REAL

Si f es una función continua definida para una variable real x las integrales impropias se definen, por ejemplo, via:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx \ ;$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^b f(x)dx \ ;$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx \ + \ \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 f(x)dx \ .$$

En el último caso, si ambos límites existen se tendrá

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)dx \ ,$$

aunque en general este último límite puede existir sin que existan los dos límites anteriores (e.g., para una función impar). Se define el **valor principal** (según Cauchy) como

$$p.v.\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)dx \ . \tag{10.4}$$

Del mismo modo, si f tiene una singularidad en x_o en el intervalo $[a,b]$, el **valor principal** de la integral de f sobre $[a,b]$ se define como:

$$p.v.\int_a^b f(x)dx = \lim_{0<\epsilon\to 0}\left(\int_a^{x_o-\epsilon} f(x)dx \ + \ \int_{x_o+\epsilon}^b f(x)dx\right) \ , \tag{10.5}$$

cuando el límite, que puede ser $\pm\infty$, existe. Notese que el límite se toma simetricamente alrededor de la singularidad. Aqui, nuevamente, si ambas integrales impropias

$$\int_a^{x_o} f(x)dx = \lim_{0<\epsilon\to 0}\int_a^{x_o-\epsilon} f(x)dx \ ,$$

$$\int_{x_o}^b f(x)dx = \lim_{0<\epsilon\to 0}\int_{x_o+\epsilon}^b f(x)dx$$

existen y son finitas, entonces

$$p.v.\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_o} f(x)dx + \int_{x_o}^b f(x)dx \ .$$

Pero, no es cierto de que de la finitud del valor principal, se pueda deducir que las integrales indefinidas existen y son finitas.

Las integrales impropias en general – con singularidades y fronteras infinitas – se obtienen combinando ambos casos y con ellas se asocia un valor principal; por ejemplo

$$p.v.\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{R\to\infty\,,\,\epsilon\to 0\,,\,\delta\to 0}\left(\int_{-R}^{-1-\delta} + \int_{-1+\delta}^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^R\right)\frac{dx}{1-x^2} \ .$$

Supongamos que queremos calcular el valor principal (10.4) para una función f. Supongamos que encontramos una función F analítica en el semiplano superior cerrado $\{z\in\mathbb{C} : \ Im(z)\geq 0\}$ salvo en un número finito de singularidades aisladas $z_1, z_2, \cdots, z_n$ en el semiplano superior abierto. Supongamos también que $F(x) = f(x)$ para $x\in\mathbb{R}$. Para un $R>0$, considere el camino cerrado simple Γ_R formado por: $\gamma_R = \{z(x) = x \ : \ -R\leq x\leq R\}$ (el segmento de la recta real entre los puntos $-R$ y R) y $C_R^+ = \{z(t) = Re^{it} \ : \ 0\leq t\leq\pi\}$ (el semicirculo superior de radio R). Podemos elegir R lo suficientemente grande tal que las n singularidades en el plano superior abierto esten contenidas en el dominio encerrado po Γ_R. Luego,

$$\int_{\Gamma_R} F(z)dz = \int_{\gamma_R} F(z(x))dx \ + \ iR\int_0^\pi F(Re^{it})e^{it}dt = 2\pi i\sum_{j=1}^n Res(F;z_k) \ .$$

Entonces,

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{\gamma_R} F(z(x))dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(F; z_k) \; - \; iR \int_0^{\pi} F(Re^{it})e^{it}dt \; .$$

Si logramos demostrar que

$$\lim_{R\to\infty} R \int_0^{\pi} F(Re^{it})e^{it}dt = 0 \; , \tag{10.6}$$

obtenemos la fórmula

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(F; z_k) \; . \tag{10.7}$$

Un caso práctico es el siguiente

Lema 10.1 *Si $f(z) = P(z)/Q(z)$ es cociente de dos polinomios tal que el grado de Q es mayor o igual al grado de P mas 2, entonces (10.6) se cumple y por ende (10.7) es válida.*

Demostración: La relación entre los grados de los polinomios implica que para R lo suficientemente grande, $|f(Re^{it})| \leq MR^{-2}$ para una constante positiva M. Luego,

$$\left| R \int_0^{\pi} F(Re^{it})e^{it}dt \right| \leq MR^{-1}\pi \; ,$$

y (10.6) se satisface. XX

INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS – LEMA DE JORDAN

Considere las integrales impropias $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(cx)dx$ o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(cx)dx$, que serán parte real e imaginaria respectivamente de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{icx}dx$ que es la **transformada de Fourier** de f. Si f satisface las condiciones del Lema anterior, es inmediato verificar que se cumple (10.6) y por ende (10.7). El siguiente resultado permite ganar una potencia en el numerador

Lema 10.2 (Lema de Jordan) *Si $a > 0$ entonces*

$$\int_0^{\pi} e^{-a\sin(\phi)}d\phi \; < \; \pi/a \; .$$

Demostración: la función $[0, \pi] \ni \phi \mapsto \sin(\phi)$ es cóncava (ver figura 1)

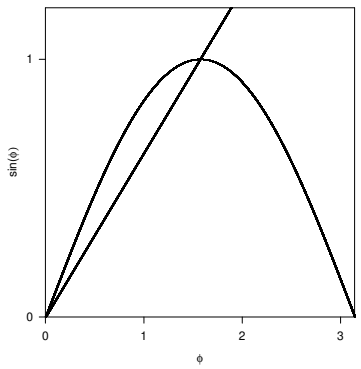


Figura 10.1:

Esto se ve, por ejemplo, observando que la segunda derivada es $-\sin(\phi)$ y que esto toma valores no positivos en el intervalo. La concavidad indica que el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera del gráfico $\{(\phi, \sin(\phi) : \ 0 \leq \phi \leq \pi\}$ esta siempre por debajo de la curva. Tomando el segmento de recta que une $(0,0)$ con $(\pi/2, 1)$ – determinado por la ecuación $y(\phi) = \frac{1}{\pi/2}\phi$ – tenemos $\sin(\phi) \geq 2\phi/\pi$ en el intervalo $[0, \pi/2]$. Al ser $a > 0$ y exp una función monótona creciente, tenemos $\exp(-a\sin(\phi)) \leq \exp(-2a\phi/\pi)$. Luego,

$$\int_0^{\pi} e^{-a\,\sin(\phi)} d\phi = 2\int_0^{\pi/2} e^{-a\,\sin(\phi)} d\phi \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2a\phi/\,\pi} d\phi = 2\frac{-\pi}{2a}\left(e^{-a} - 1\right) < \pi/a\ ,$$

ya que $1 - e^{-a} < 1$.

Lema 10.3 *Si P/Q es el cociente entre dos polinomios tal que el grado de Q es mayor o igual al de P mas 1 entonces*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} e^{icz} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$$

para todo $c > 0$.

Demostración: Tenemos

$$\int_{C_R^+} e^{icz} \frac{P(z)}{Q(z)} = iR \int_0^{\pi} \exp\left(icRe^{i\phi}\right) \frac{P\left(Re^{i\phi}\right)}{Q\left(Re^{i\phi}\right)} e^{i\phi} d\phi\ .$$

La condición sobre los grados indica que

$$\left|\frac{P\left(Re^{i\phi}\right)}{Q\left(Re^{i\phi}\right)}\right| \leq MR^{-1}$$

para R lo suficientemente grande y una constante positiva M. Ya que

$$\left|\exp\left(icRe^{i\phi}\right)\right| = \exp(-cR\sin(\phi))\ ,$$

obtenemos

$$\left|\int_{C_R^+} e^{icz} \frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq M \int_0^{\pi} e^{-cR\,\sin(\phi)} d\phi$$

y una aplicación del lema de Jordan conduce al resultado. XX

Observe que si uno trabaja en el semiplano inferior entonces, para $a < 0$,

$$\left|\int_0^{-\pi} e^{-a\,\sin(\phi)} d\phi\right| \ < \ \pi/|a|\ .$$

INTEGRACIÓN ALREDEDOR DE UNA SINGULARIDAD REAL

Esta técnica nos permitira el cálculo de integrales reales impropias de funciones reales que son continuas salvo en un número finito de puntos. Como en el caso ya visto donde no hay discontinuidades, el método de los residuos nos permite calcular el valor principal.

Sea f una función de una variable real continua salvo en un punto x_o. El valor principal de la integral de f es

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty\,,\,\epsilon\to 0^+} \left(\int_{-R}^{x_o-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_o+\epsilon}^{R} f(x)dx\right)$$

cuando el límite existe. Muchas veces algún argumento permite deducir la existencia de la integrales impropias

$$\int_{x_o}^{\infty} f(x)dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{x_o} f(x)dx$$

y, en tal caso, la suma de estas integrales es el valor principal de la integral de f.

Considere entonces una función f analítica en el semiplano superior cerrado $\{z \in \mathbb{C} \ : \ Im(z) \geq 0\}$ salvo en un polo simple x_o que es real y en un número finito de singularidades aisladas dentro del semiplano

superior abierto $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. Para $0 < \epsilon < R$, considere el camino cerrado simple $\Gamma_{R,\epsilon}$ orientado positivamente formado por: el semicírculo superior C_R^+ de radio R alrededor de x_o, el segmento del eje real comprendido entre $-R$ y $x_o - \epsilon$, el semicírculo superior C_ϵ^+ de radio ϵ alrededor de x_o y el segmento del eje real comprendido entre $x_o + \epsilon$ y R. Entonces

$$\int_{-R}^{x_o-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_o+\epsilon}^{R} f(x)dx = \int_{\Gamma_{R,\epsilon}} f(z)dz - \int_{C_R^+} f(z)dz - \int_{C_\epsilon^+} f(z)dz$$

$$= 2\pi i\,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro del dominio encerrado por } \Gamma_{R,\epsilon})$$

$$- \int_{C_R^+} f(z)dz - \int_{C_\epsilon^+} f(z)dz\ .$$

Cuando R es lo suficientemente grande y ϵ lo suficientemente chico $\Gamma_{R,\epsilon}$ encierra todos las singularidades de f en el semiplano superior abierto. Ya hemos establecido técnicas para garantizar que la integral sobre C_R^+ se anula cuando $R \to \infty$. Nos falta estimar la integral sobre C_ϵ^+ para ϵ chico. El siguiente resultado permite hacer justamente esto

Lema 10.4 *Si z_o es un polo simple de f; si $r > 0$ y $A_r = \{z(t) = z_o + re^{it} : \theta_1 \le t \le \theta_2\}$ es el arco del círculo de radio r alrededor de z_o comprendido entre los ángulos θ_1 y θ_2, entonces*

$$\lim_{r\to 0} \int_{A_r} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)Res(f; z_o)\ .$$

Demostración: El desarrollo de Laurent de f alrededor de z_o es $f(z) = a_{-1}(z - z_o)^{-1} + \sum_{n=)}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ en algún entorno pinchado de z_o. Eligiendo $r > 0$ tal que el arco A_r caiga dentro del entorno, podemos integrar término a término por la convergencia uniforme de la serie. Entonces

$$\int_{A_r} f(z)dz = a_{-1}\int_{A_r} \frac{1}{z - z_o}dz + \int_{A_r} g(z)dz\ ,$$

donde g es la suma de la serie de potencias $\sum_{n=)}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ que es analítica en todo el entorno de z_o. La función g es de módulo acotado en A_r ya que es analítica en todo el entorno. Luego

$$\left|\int_{A_r} g(z)dz\right| \le M\ .\ (\text{ largo del arco } A_r\ ) = Mr(\theta_2 - \theta_1)\ ,$$

y el miembro derecho de la desigualdad tiende a 0 para $r \to 0$. Por otro lado,

$$\int_{A_r} \frac{1}{z - z_o}dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = i\int_{\theta_1}^{\theta_2} dt = i(\theta_2 - \theta_1)\ .\ \boxed{\text{XX}}$$

Aplicando este resultado a la integral sobre el semicírculo superior C_ϵ^+, obtenemos ($\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$)

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_\epsilon^+} f(z)dz = -i\pi Res(f; z_o)\ .$$

Un ejemplo concreto: $p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} = ?$ Aqui $f(z) = e^{iz}/z$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y 0 es un polo simple. Tomando el camino $\Gamma_{R,\epsilon}$ (que no encierra ninguna singularidad de f), la integral sobre C_ϵ^+ da

$$-i\pi Res(f; 0) = -i\pi \lim_{z\to 0} e^{iz} = -i\pi$$

en el límite $\epsilon \to 0$. El Lema 3 indica que (use $P(z) = 1$, $Q(z) = z$) que la integral sobre C_R^+ se anula en el límite $R \to \infty$. Por lo tanto,

$$p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx = -(-i\pi) = i\pi\ .$$

Tomando las partes real e imaginaria, obtenemos $p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx = 0$ lo que no sorprende puesto que el integrando es impar [1]; y $p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \pi$ [2]

[1] Observese que $\frac{\cos(x)}{x} \sim (1/x)$ para $x \sim 0$ y por ende la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx$ no existe.

[2] Observese que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ y que el integrando es par; luego podemos deducir que $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = 2p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \pi/2$.

Otro ejemplo: $p.v.\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = ?$. La fórmula elemental de integración (indefinida)

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = (1/2)\log\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

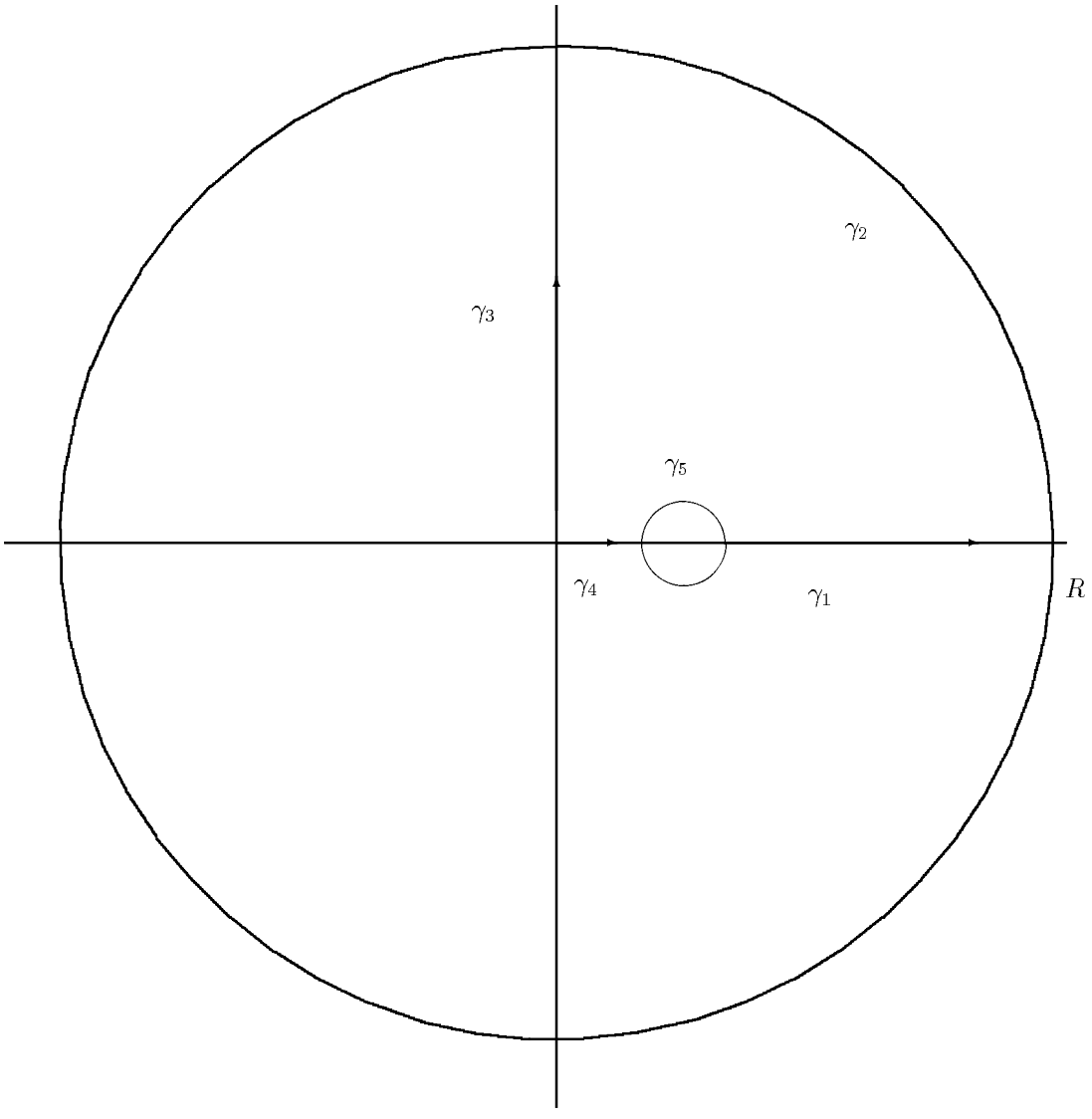
permite verificar inmediatamente que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \infty \ , \ \int_1^\infty \frac{dx}{1-x^2}dx = -\infty \ .$$

Sin embargo veremos que el valor principal se anula. Tenemos

$$p.v.\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{0<\epsilon\to 0\ ,\ 0<R\to\infty}\left(\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+\epsilon}^{R}\frac{dx}{1-x^2}\right) \ .$$

Considerando la función $f(z) = 1/(1-z^2)$ que es analítica en todo $\mathbb{C}$ salvo en $z = \pm 1$ donde tiene sendos polos simples y el camino $\gamma(\epsilon, R) = \gamma_1(\epsilon, R) + \gamma_2(R) + (-\gamma_3(R)) + \gamma_4(\epsilon) + \gamma_5(\epsilon)$ con



$$\gamma_1(\epsilon, R) = \{z_1(t) = t : \ 1+\epsilon \le t \le R\} \ , \ \ \gamma_2(R) = \{z_2(t) = Re^{it} : \ 0 \le t \le \pi/2\} \ ,$$

$$\gamma_3(R) = \{z_3(t) = it : \ 0 \le t \le R\} \ , \ \ \gamma_4(\epsilon) = \{z_4(t) = t : \ 0 \le t \le 1-\epsilon\} \ ,$$

$$\gamma_5(\epsilon) = \{z_5(t) = 1 + \epsilon e^{it} : \ \pi \ge t \ge 0\} \ ,$$

donde $0 < \epsilon < 1 < R$, se tiene:

$$\int_{\gamma_1(\epsilon,R)} f(z)dz = \int_{1+\epsilon}^{R} f(x)dx \ , \ \int_{\gamma_4(\epsilon)} f(z)dz = \int_{0}^{1-\epsilon} f(x)dx \ ,$$

$$\left| \int_{\gamma_2(R)} f(z)dz \right| = \left| iR \int_0^{\pi/2} \frac{e^{it}}{1 - R^2 e^{2it}} dt \right| \leq \frac{R(\pi/2)}{R^2 - 1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ , \quad \int_{\gamma_3(R)} f(z)dz = i \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} \ .$$

La última integral puede calcularse con la fórmula de integración indefinida

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$$

para obtener

$$\int_{\gamma_3(R)} f(z)dz = i \arctan(R) \ .$$

Luego,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3(R)} f(z)dz = i\pi/2 \ .$$

Usando el Lema 10.4, se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_5(\epsilon)} f(z)dz = i(0-\pi) Res(f,;1) \ .$$

Además,

$$Res(f;1) = -1/2 \ .$$

Entonces, observando que f es analítica dentro y sobre γ, obtenemos

$$0 = \int_\gamma f(z)dz$$

para todo ϵ, R que satisfagan las condiciones impuestas; y por lo tanto

$$p.v. \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty \, , \, \epsilon\to 0} \left(\int_{\gamma_1(\epsilon,R)} + \int_{\gamma_4(\epsilon)} \right) f(z)dz$$

$$= \lim_{R\to\infty \, , \, \epsilon\to 0} \left(\int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_2(R)} f(z)dz + \int_{\gamma_3(R)} f(z)dz - \int_{\gamma_5(\epsilon)} f(z)dz \right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2(R)} f(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3(R)} f(z)dz - \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_5(\epsilon)} f(z)dz$$

$$= 0 + (i\pi/2) - (i\pi/2) = 0 \ .$$

INTEGRACIÓN A LO LARGO DE UN CORTE DE RAMIFICACIÓN

Estudiamos un ejemplo particular que ilustra las ideas básicas. Considere $f(z) = z^\alpha g(z)$ donde α es un número real no entero, y g es (por ejemplo) una función racional (i.e., analítica salvo en polos) sin singularidades en el eje real no negativo. Queremos calcular la integral impropia

$$\int_0^\infty x^\alpha g(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+ \, , \, R\to\infty} \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx \ .$$

Para definir z^α debemos elegir un rama analítica, por ejemplo

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log(|z|) + i\alpha\theta) \ , \ z = |z|e^{i\theta} \ , \ 0 < \theta < 2\pi \ ,$$

con corte de ramificación en el eje real no negativo. Tomemos los caminos $\gamma^+ = \{z = x \, : \, \epsilon \leq x \leq R\}$ y $\gamma^- = \{z = x \, : \, R \geq x \geq \epsilon$. Definamos,

$$f^+(z) = x^\alpha g(x) \ , \quad z = x \in \gamma^+ \ ;$$

$$f^-(z) = e^{i\alpha 2\pi} x^\alpha g(x) \ , \quad z = x \in \gamma^- \ .$$

Esto corresponde a tomar el límite de $f(z)$ para $z \to x \ (\geq 0)$ con parte imaginaria positiva (o sea desde el semiplano superior) o bien con parte imaginaria negativa (o sea desde el semiplano inferior):

$$f^\pm(x) = \lim_{z \to x \ , \ \pm Im(z) > 0} f(z) \ .$$

Notese que

$$\int_{\gamma^+} f^+(z)dz = \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx \ ;$$

$$\int_{\gamma^-} f^-(z)dz = \ -e^{i\alpha 2\pi} \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx \ .$$

Para poder usar el método de los residuos queremos un camino cerrado Γ formado a partir de los caminos cerrados $\gamma^\pm$. Sea C_R el círculo de radio R alrededor de 0 orientado positivamente, y C_ϵ el círculo de radio ϵ orientado negativamente. Entonces $\Gamma = C_R + C_\epsilon + \gamma^+ + \gamma^-$ forma un camino cerrado (que no es simple ya que $\gamma^\pm$ son los mismos caminos recorridos en sentido inverso).

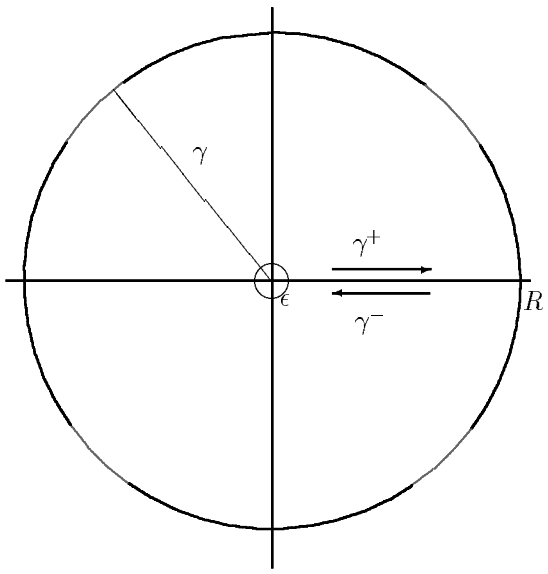


Figura 10.2:

Definimos la "integral de f sobre Γ" por:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \left(\int_{C_R} + \int_{C_\epsilon} \right) f(z)dz + \int_{\gamma^+} f^+(z)dz + \int_{\gamma^-} f^-(z)dz \ ,$$

y obtenemos la siguiente fórmula para la integral real que nos interesa:

$$(1 - e^{i\alpha 2\pi}) \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx = \int_\Gamma f(z)dz \ - \left(\int_{C_R} + \int_{C_\epsilon} \right) f(z)dz \ .$$

Por ahora no podemos decir nada sobre las integrales $\int_{C_R(C_\epsilon)} f(z)dz$ salvo que están bien definidas pues en estos círculos la función f es continua salvo en $z = R$ y en $z = \epsilon$ respectivamente pero los límites de f en estos puntos tomados por los círculos desde arriba o abajo existen (aunque son distintos).

Elijamos ahora un segmento de recta γ que une ambos círculos dado por $\gamma = \{re^{i\theta_o} \ : \ \epsilon \leq r \leq R\}$ con θ_o tal que $\pi/2 < \theta_o < \pi$. Consideremos el camino cerrado simple orientado positivamente $\Gamma_1 = C_R + (-\gamma) + C_\epsilon + \gamma^+$, o sea: de $z = R$ por C_R hasta el punto $Re^{i\theta_o}$, luego por $-\gamma$ hasta el punto $\epsilon e^{i\theta_o}$; de alli por el semicírculo superior de C_ϵ hasta ϵ y luego por γ^+ hasta R. Sea $f_1(z) = g(z)\exp(\alpha Log(z)) = g(z)\exp(\alpha \log(|z|) + i\alpha Arg(z)$ definida usando la rama principal del logarítmo que tiene al eje real no positivo como corte de ramificación. Tenemos,

- $f(z) = f_1(z)$ para todo z en el dominio encerrado por Γ_1;

- $f(z) = f_1(z)$ sobre $\Gamma_1 \setminus \gamma^+$ y $f_1(z) = f^+(z)$ sobre γ^+;
- f_1 es analítica en el dominio encerrado por Γ_1 y sobre Γ_1 salvo en un número finito de puntos (singularidades de g) que eligiendo a R lo suficientemente grande, a ϵ lo suficientemente chico, y a θ_o convenientemente no caen sobre Γ_1.

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma_1} f_1(z) = 2\pi i \,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro del dominio encerrado por } \Gamma_1)\ . \tag{10.8}$$

Consideremos ahora el camino cerrado simple orientado positivamente $\Gamma_2 = C_R + \gamma + C_\epsilon + \gamma^-$ y la función $f_2(z) = g(z)\exp(\alpha \log(|z|) + i\alpha\phi)$ donde $z = |z|e^{i\phi}$ con $\pi/2 < \phi < 5\pi/2$. El corte de ramificación es el semieje imaginario superior. Nuevamente,

- $f(z) = f_2(z)$ para todo z en el dominio encerrado por Γ_2;
- $f(z) = f_2(z)$ sobre $\Gamma_2 \setminus \gamma^-$ y $f_2(z) = f^-(z)$ sobre γ^-;
- f_2 es analítica en el dominio encerrado por Γ_2 y sobre Γ_2 salvo en un número finito de puntos (singularidades de g) que eligiendo a R lo suficientemente grande, a ϵ lo suficientemente chico, y a θ_o convenientemente no caen sobre Γ_2.

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma_2} f_2(z) = 2\pi i \,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro del dominio encerrrado por } \Gamma_2)\ . \tag{10.9}$$

Eligiendo ahora R, ϵ y θ_o de tal manera que las fórmulas (10.8) y (10.9) sean correctas, tenemos

$$\int_{\Gamma_1} f_1(z)dz + \int_{\Gamma_2} f_2(z)dz = 2\pi i \,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro de los dominios}$$

$$\text{encerrados por } \Gamma_1 \text{ y } \Gamma_2)\ .$$

Pero por construcción la suma de las integrales en el miembro izquierdo de esta igualdad son precisamente la integral de f sobre Γ ya que $f_1(z) = f_2(z)$ sobre γ y $-\gamma$. Por lo tanto,

$$(1 - e^{i\alpha 2\pi}) \int_\epsilon^R x^\alpha g(x)dx = -\left(\int_{C_R} + \int_{C_\epsilon}\right) f(z)dz$$

$$+2\pi i \,(\text{ suma de los residuos de } f \text{ dentro del dominio encerrado por } \Gamma)\ .$$

Si podemos demostrar que las integrales a la derecha de esta igualdad se anulan para $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$ hemos obtenido una fórmula para la integral buscada.

Veamos la aplicación a un ejemplo concreto: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}dx = ?$, para $a > 0$. En este caso $f(z) = z^{-1/2}g(z)$ con $g(z) = 1/(z+a)$ que tiene un polo simple en $z = -a$. Todo lo dicho y considerado es aplicable asi que debemos estimar las integrales sobre C_R y C_ϵ. Se tiene, para $R > a$ y $o < \epsilon < a$,

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|i\sqrt{R}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it/2}}{Re^{it} + a}dt\right| \le 2\pi\frac{\sqrt{R}}{R-a}\ ;$$

$$\left|\int_{C_\epsilon} f(z)dz\right| = \left|i\sqrt{\epsilon}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it/2}}{\epsilon e^{it} + a}dt\right| \le 2\pi\frac{\sqrt{\epsilon}}{a-\epsilon}\ ;$$

de donde se deduce que las integrales se anulan en los límites $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$. El residuo en $-a$ es $Res(f; -a) = \lim_{z\to a}(z+a)f(z) = (-a)^{-1/2} = \exp((-1/2)\log(a) - i\pi/2) = -i/\sqrt{a}$, con lo que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\ ,\quad a > 0\ .$$

Complemento A

Caminos cerrados en general. El contador de vueltas

Reconsidere la fórmula de Cauchy

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = (2\pi i)f(z)$$

para un camino cerrado simple γ tal que f es analítica dentro y sobre el dominio D encerrado por $[\gamma]$ y $z \in D$. La función $w \mapsto g_z(w) := \frac{f(w)}{w-z}$ tiene un polo simple en z y estamos integrando una vez alrededor de esta singularidad aislada. ¿Que sucede si integramos n veces alrededor de la singularidad?

Consideremos un camino cerrado arbitrario Γ tal que f se analítica en algún gran disco abierto que contiene a $[\Gamma]$ y z tal que $z \notin [\Gamma]$. La función g tiene un desarrollo de Laurent

$$g_z(w) = \frac{f(z)}{(w-z)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z)^n$$

alrededor de z y este converge uniformemente en algún anillo que contiene a $[\Gamma]$. Luego, integrando término a término

$$\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_\Gamma g_z(w)dw = f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}dw \ .$$

Teorema A.1 *Si Γ es un camino cerrado y $z \notin [\Gamma]$,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}dw =: n(\Gamma, z) \tag{A.1}$$

es un entero.

LLamamos al entero $n(\Gamma, z)$ el **contador de vueltas** de Γ con respecto a z.
Demostración: Suponemos primeramente que Γ es suave, $\Gamma = \{[0,1] \ni t \mapsto z(t)\}$. Entonces

$$\rho(t) = \int_0^t \frac{z'(t)}{z(t)-z}dt \ , \ \ 0 \le t \le 1 \ .$$

Tenemos $\rho(0) = 0$, $\rho(1) = 2\pi i n(\Gamma, z)$ y

$$\rho'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)-z} \ .$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}\exp(-\rho(t))(z(t)-z) = \exp(-\rho(t))\left(-\rho'(t)(z(t)-z) + z'(t)\right) = 0 \ .$$

Luego, $\alpha\exp(\rho(t)) = z(t) - z$ para una constante compleja α. Ya que $\rho(0) = 0$, $\alpha = z(0) - z$ y entonces

$$(z(1)-z)\exp(2\pi i n(\Gamma, z)) = z(0) - z \ .$$

Pero Γ es cerrado y $z(1) = z(0)$. Luego, $\exp(2\pi i n(\Gamma, z)) = 1$ con lo que $n(\Gamma, z)$ es entero.

En el caso general, $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$, hay n funciones ρ_j y el mismo manipuleo produce

$$(z(j-1)-z)\exp\left(2\pi i\int_{\gamma_j}\frac{1}{w-z}dw\right) = z(j) - z \ , \ \ j = 1, 2, \cdots, n$$

donde $z(j)$ es el punto final del j-ésimo camino suave que coincide con el punto inicial del $j-1$ésimo camino suave para $j = 2, \cdots, n$ y $z(0) = z(n)$ es el punto inicial de γ_1. Observando que $z \neq z(j)$ para todo $j = 0, 1, \cdots, n$ pues $z \notin [\Gamma]$ y multiplicando las n identidades, se tiene

$$\exp(2\pi i\int_\Gamma (w-z)^{-1}dw) = \prod_{j=1}^n \exp(2\pi i\int_{\gamma_j}(w-z)^{-1}dw) = \prod_{j=1}^n \frac{z(j)-z}{z(j-1)-z} = \frac{\prod_{j=1}^n (z(j)-z)}{\prod_{j=1}^n (z(j-1)-z)} = 1 \ .$$

La conclusión es la misma. XX

El lector podrá verificar tomando algunos ejemplos concretos (caminos circulares, ...) que $n(\Gamma, z)$ hace realmente lo que su nombre dice: cuenta las vueltas que da el camino alrededor de z tomando como positiva la vuelta en sentido anti-horario coincidentemente con nuestra convención de orientación positiva de un camino cerrado simple (de hecho este es el origen de la convención).

Observe que $[\Gamma]$ es compacto y por lo tanto está contenido en algún disco abierto ; si z está fuera de ese disco se tiene $n(\Gamma, z) = 0$. Esto se puede ver también observando que es posible definir una rama del logaritmo de $w - z$.

Volviendo entonces al problema original, se tiene

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z} dw = 2\pi i f(z) n(\Gamma, z)$$

una fórmula muy hermosa y útil.