Mecánica Cuántica I (2000)

Guia 2

Problemas sobre Transformada de Fourier

Problema 1 (La gaussiana) *Pruebe que* $\hat{g}(k) = e^{-k^2/2}$ *si* $g(x) = e^{-x^2/2}$. *Utilize el siguiente metodo: Vea que* $g(x)$ *satisface la ecuación* $(\frac{d}{dx} + x)g(x) = 0$. *De las propiedades de la transformada de Fourier vea que equación satisface* $\hat{g}(k)$. *Encuentre la solución general de esta ecuación. Determine la constante de integración usando la identidad de Plancherel.*

Problema 2 (Función de onda gaussiana) *Considere a la función gaussiana*

$$\varphi_{a,\sigma}(x) = N \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{4\sigma} + ik_o x\right\} \quad , \quad a \text{ real, } k \text{ real } y\ \sigma > 0 \ .$$

Determine N *para que* $\varphi_{a,\sigma}$ *este normalizada, i.e.,* $\int |\varphi_{a,\sigma}(x)|^2 dx = 1$. *Suponga que esta función normalizada es la función de onda de una partícula y calcule el valor esperado de la posición*

$$< x >= \int x|\varphi_{a,\sigma}(x)|^2 dx$$

y la dispersión cuadrática asociada $< x^2 > - < x >^2 = < (x - < x >)^2 >$.

Determine la transformada de Fourier de esta función de onda

$$\widehat{\varphi}_{a,\sigma}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ikx} \varphi_{a,\sigma}(x) dx \ .$$

Calcule el valor esperado del momento

$$< p >= \hbar \int k|\widehat{\varphi}_{a,\sigma}(k)|^2 dk$$

y la dispersión asociada.

¿Cuanto vale el producto de las dispersiones calculadas?

Suponga que la particula es libre y tiene masa M. *Determine la evolución temporal de la función de onda. Repita los cálculos anteriores (valores esperados, dispersiones, etc.) y discuta el comportamiento temporal.*

Sugerencia: Para no repetir los cálculos, empieze por el final.
Todas las integrales necesarias se obtienen a partir de

$$\int \exp\left\{-\alpha t^2 + \beta t\right\} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left\{\frac{\beta^2}{4\alpha}\right\} \quad , \quad Re(\alpha) > 0 \ .$$

Problema 3 (Relación de incerteza entre el ancho de banda y la duración de una señal) *Se acostumbra decir que las relaciones de incerteza son características para la mecánica cuántica. Cualquiera que se haya ocupado del análisis y procesamiento de señales temporales sabe que esto no es cierto. Considere una señal* $t \to f(t)$, *por ejemplo la* *amplitud de una corriente eléctrica, o de una señal sonora, etc. Si* $\widehat{f}$ *es la transformada de Fourier de* f,

$$\widehat{f}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-i\omega t} f(t) dt$$

la fórmula de inversión

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{i\omega t} \widehat{f}(\omega) d\omega$$

exhibe a f *como superposición de oscilaciones puras* $t \to e^{i\omega t}$ *de frecuencia* $\omega/(2\pi)$. *Es un hecho matemático que* $|f|$ *y* $|\widehat{f}|$ *no pueden estar ambas muy concentradas (o sea tomar valores apreciablemente distintos de cero en regiones pequeñas) a la vez. Si*

$$< t >_f = \frac{\int t|f(t)|^2 dt}{\int |f(t)|^2 dt}$$

y

$$< \omega >_f = \frac{\int \omega|\widehat{f}(\omega)|^2 dt}{\int |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega}$$

denota los valores esperados (o promedio) del tiempo y de la frecuencia respectivamente, las respectivas dispersiones

$$(\Delta t)^2_f = < (t- < t >_f)^2 >_f = \frac{\int (t- < t >_f)^2 |f(t)|^2 dt}{\int |f(t)|^2 dt}$$

y

$$(\Delta\omega)^2_f = < (\omega- < \omega >_f)^2 >_f = \frac{\int (\omega- < \omega >_f)^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega}{\int |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega}$$

satisfacen

$$(\Delta t)_f (\Delta\omega)_f \geq 1/2 \ . \tag{1}$$

Siendo que $(\Delta t)_f$ *es una medida de la duración efectiva de la señal y* $(\Delta\omega)_f$ *una medida del ancho de banda efectivo de la misma, no se puede limitar arbitrariamente el ancho de banda y la duración de una señal simultaneamente. Para demostrar la desigualdad (1), se pueden seguir los siguientes pasos:*

1. *Reemplazando a* f *por* $(\int |f(t)|^2 dt)^{-1/2} f$ *se puede suponer que* f *está normalizada, i.e.,* $\int |f(t)|^2 dt = 1$. *Esto tiene como consecuencia que tambien* $\widehat{f}$ *está normalizada (la transformación de Fourier preserva la normalización, o en otras palabras es una isometría).*

2. *Usando la fórmula distribucional*

   $$\int e^{iyx} dx = 2\pi\delta(y) \ ,$$

   convenzase que

   $$< \omega >_f = -i \int \overline{f(t)} (df/dt)(t) dt \quad , \quad \int \omega^2 |\widehat{f}(\omega)| d\omega = \int |(df/dt)(t)|^2 dt \ .$$

3. *Integrando por partes se ve (tenga en cuenta la integrabilidad de $|f(t)|^2$ y de $t^2|f(t)|^2$) que*

$$\int \left((df/dt)(t)\overline{f(t)} + \overline{(df/dt)(t)}f(t)\right) dt = 0 \ ,$$

$$\int t \left((df/dt)(t)\overline{f(t)} + \overline{(df/dt)(t)}f(t)\right) dt = -1$$

4. *Si para un número complejo λ arbitario,*

$$f_\lambda(t) = (t - < t >_f)f(t) + \lambda(df/dt)(t) - i\lambda < \omega >_f f(t) \ ,$$

observe que, trivialmente,

$$\int |f_\lambda(t)|^2 dt \geq 0 \ , \quad \textit{para todo } \lambda \textit{ complejo} \ ,$$

y verifique que

$$\int |f_\lambda(t)|^2 dt = (\Delta t)_f^2 + \lambda^2(\Delta\omega)_f^2 - \lambda \ , \ \textit{si } \lambda \textit{ es real.}$$

Problemas sobre Espacios de Hilbert

Problema 4 (Ley del Paralelogramo) *La ley del paralelogramo es una relación que satisfacen ciertas normas,*

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2) \tag{2}$$

Muestre que una norma la satisface si y solo si esta proviene de un producto escalar. Ayuda: Utilice la denominada identidad de polarización para definir un producto interno a partir de la norma,

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4}\{[\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2]-\Im[\|\boldsymbol{x}+\Im\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\Im\boldsymbol{y}\|^2] \tag{3}$$

Compruebe esta identidad.

Problema 5 (Bases: caso de dimensión finita) *Sea H un espacio de Hilbert de dimensiín finita, n, con producto escalar denotado por $(\cdot,\cdot)$ y sea $\{\boldsymbol{e}_i\}$ una base de H.*

a) Probar que si para todo i, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i)=0$ luego $\boldsymbol{\alpha}=0$. Ayuda: escriba a $\boldsymbol{\alpha}$ como combinación lineal de la base y concluya que $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

b) Si $\{c_i\}$, $i=1,\ldots,n$. son números arbitrarios, luego existe un vector $\boldsymbol{\alpha}\in H$ tal que $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i)=c_i$. ¿Cual es este vector en el caso de que la base sea ortonormal?

Problema 6 (Bases: Caso de dimensión infinita) *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita con producto escalar denotado por $(\cdot,\cdot)$ y sea $\{\boldsymbol{e}_i\}$ una base numerable de H, (no todo espacio de Hilbert admite una base numerable, pero los que aparecen normalmente en cúantica si). Recuerde que en este caso decimos que un conjunto infinito de elementos linealmente independientes forman una base si dado cualquier elemento de H, $\boldsymbol{\alpha}$, y $\varepsilon>0$ existe un subconjunto* ***finito*** *de elementos de dicha base y un correspondiente conjunto de números complejos $\{\alpha_i\}$ tal que $\|\boldsymbol{\alpha}-\sum_{i=1}^n\alpha_i\boldsymbol{e}_i\|<\varepsilon$. En la expresión anterior la suma cubre solo el conjunto finito mensionado y por lo tanto es finita. En general, tanto el conjunto como los números α_i cambian si cambiamos ε.*

a) Idem al punto correspondiente al problema anterior.

b) Idem del punto correspondiente al problema anterior cuando el número del los c_i es finito.

c) Encuentre un ejemplo para algún espacio de Hilbert en particular de un conjunto infinito de $\{c_i\}$ donde no exista ningún $\boldsymbol{\alpha}\in H$ tal que $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i)=c_i$. Ayuda: Use una base ortogonal y un conjunto de números tales que $\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2=\infty$.

Problema 7 (Completitud) *Considere el espacio H_{pre} de funciones contínuas del intervalo $[0,1]$ en los complejos con el siguiente producto escalar:*

$$(f,g):=\int_0^1\bar{f}(x)g(x)dx. \tag{4}$$

Vea que este espacio no es completo y por lo tanto no es un espacio de Hilbert. Ayuda: Encuentre una sucesión de Cauchy (con respecto a la norma $\|f\|^2:=(f,f)$) de funciones en H_{pre} tales que la sucesión converge a una función no contínua.