Mecánica Cuántica I (2000)

Guía 3

Problema 1 (Proyectores) *Sean los vectores* $\boldsymbol{e}_1$ *y* $\boldsymbol{e}_2$ *en* C^3 *dados respectivamente por las siguientes componentes con respecto a una base ortogonal* $(1,0,0)$ *y* $(1,1,1)$*. Encuentre el proyector que envía cualquier vector de* C^3 *al subespacio subtendido por estos dos vectores. Encuentre el proyector que envía cualquier vector en* C^3 *al espacio perpendicular al subespacio generado por estos vectores.*

Problema 2 *Dados dos operadores Hermitianos* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$*, ¿qué puede decir de los siguientes operadores? :*
a) $\boldsymbol{AB}$
b) $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$
c) $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$
d) $i\,[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$

Problema 3 *La traza de una matriz está definida como la suma de los elementos de su diagonal*

$$Tr\,(A)=\sum_i A_{ii}$$

Muestre que:
a) $Tr(AB)=Tr(BA)$
b) La traza de un operador no cambia por un cambio de base unitario $\boldsymbol{e}_i \rightarrow \boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_i$*.*

Problema 4 *Calcular los autovalores de cada una de las cinco matrices siguientes (Matrices de Dirac).*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Problema 5 *Tome una de las matrices anteriores y encuentre una base donde la matriz sea diagonal, exprese luego el vector con componentes* $(1,1,0,0)$ *en la nueva base.*

Problema 6 *Sean* A *y* B *dos matrices* $n\times n$*, con* A *no singular, demostrar que* $A\cdot B$ *y* $B\cdot A$ *tienen el mismo conjunto de autovalores, incluso en el caso que* B *es singular.*

Problema 7 *Muestre que para el operador exponencial se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $e^{(t+s)\boldsymbol{A}} = e^{t\boldsymbol{A}}\ e^{s\boldsymbol{A}}$.
2. *Si* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *conmutan, es decir* $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, *luego* $e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})} = e^{\boldsymbol{A}}\, e^{\boldsymbol{B}}$.
3. $\frac{de^{t\boldsymbol{A}}}{dt} = \boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}}$.
4. $det(e^{\boldsymbol{A}}) = e^{tr(\boldsymbol{A})}$

   Ayuda: *En este último punto puede usar dos métodos:*
   a) Considere las funciones: $\phi_1(t) := \det(e^{\boldsymbol{A}t})$, *y* $\phi_2(t) := e^{t\ tr\boldsymbol{A}}$ *y vea que ambas satisfacen la misma ecuación diferencial. Para ello use que*

$$tr\boldsymbol{A} := \frac{d\det(\boldsymbol{I} + s\boldsymbol{A})}{ds}|_{s=0}$$

   b) Alternativamente use que el operador exponencial puede escribirse como:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}}{n}\right)^n$$

Problema 8 (Matrices normales) *Sea* N *una matriz normal* ($NN^\star - N^\star N = 0$)*:*
a) Muestre que si la dispersión de una matriz normal con respecto a un dado estado es cero luego el estado es un autovector del operador en cuestión. Nota: por estado entendemos un elemento normalizado de un espacio de Hilbert. Encuentre también un contraejemplo a esta afirmación cuando la condición de normalidad no es requerida.
b) Vea que los autovectores de N *son también autovectores de* $N^\star$ *y los correspondientes autovalores son los complejo-conjugados de los autovalores de* N*. Ayuda: Calcule la dispersión de* $N^\star$ *con respecto al estado correspondiente al autovector de* N*. Alternativamente calcule la norma de* $(N - \lambda I)u$.
c) Pruebe que si $\boldsymbol{u}_1$ *y* $\boldsymbol{u}_2$ *son dos autovectores correspondientes a diferentes autovalores de una matriz normal,* N*, luego son ortogonales entre sí.*
d) N *tiene un conjunto completo de autovectores ortogonales. Ayuda: Se prueba por inducción en el número de elementos: El primer elemento existe pues la ecuación* $Nu = \lambda u$ *siempre tiene un par* (λ, u) *solución (Teorema fundamental del álgebra). Si ya tenemos* $m < n$ *elementos considere la acción de* N *en el espacio perpendicular al espacio subtendido por los* m *primeros elementos y vea que* N *envía dicho espacio en sí mismo.*
d) Si N_1 *y* N_2 *son dos matrices normales que conmutan, luego tienen un conjunto de autovectores ortogonales comunes.*

Problema 9 (Operadores Hermitianos) *Muestre que cualquier operador lineal puede ser escrito como combinación lineal de dos operadores hermitianos.*

Problema 10 (Isometrías) *Un operador es llamado isométrico si mapea un espacio de Hilbert en otro preservando la norma. Es decir:* $\boldsymbol{T} : H_1 \to H_2$ *es isométrico si* $\|\boldsymbol{T}f\|_2 = \|f\|_1 \quad \forall f \in H_1$*. Muestre que:*
a) $\boldsymbol{T}$ *es isométrico si y solo si* $\boldsymbol{T}^\star\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}_1$.
b) $\boldsymbol{T}$ *es isométrico si y solo si* $(\boldsymbol{T}f, \boldsymbol{T}g)_2 = (f, g)_1$*. Ayuda: Use la identidad de polarización.*

Problema 11 (Operadores Unitarios (dimensión finita)) *Sea $\boldsymbol{U}$ un operador unitario:*

a) Muestre que los autovalores de $\boldsymbol{U}$ tienen módulo unitario.

b) Muestre que $\boldsymbol{U}$ tiene un conjunto ortogonal y completo de autovectores.

c) Muestre que si $\boldsymbol{C}$ es un operador hermitiano, luego $\boldsymbol{U} = e^{i\boldsymbol{C}}$ es unitario.

d) Muestre que existe un operador hermitiano, $\boldsymbol{C}$, tal que $\boldsymbol{U} = e^{i\boldsymbol{C}}$. Ayuda: considere el operador definido en todo elemento de H por su acción en los autovectores de $\boldsymbol{U}$: $\boldsymbol{C}u_j = -i\ln(\lambda_i)u_j$ donde u_j es un autovector de $\boldsymbol{U}$ con autovalor λ_j.