Mecánica Cuántica I

Guía 5 - Abril 2000

Problema 1: *El potencial periódico de Kronig-Penney.* Considere una partícula bajo la acción de un potencial periódico descripto por:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x - na < b \\ \\ V_o & b \leq x - na < a \end{cases}$$

con n entero.

a) Encuentre la matriz $C(\epsilon)$ que relaciona las amplitudes de onda en x y $x - a$.

b) Grafique (con ayuda de computadoras si es necesario) las bandas permitidas para la energía tomando $b = a/2$, $U_o = 100/a^2$ y $U_o = 10/a^2$, y también tomando $b = 3a/4$, $U_o = 100/a^2$ y $U_o = 10/a^2$.

c) Considere ahora el caso de potencial periódico de centros atractivos que pueden representarse por funciones delta. Para ello redefina $V(x) = -V_o$ si $0 \leq x - na < b$, y $V(x) = 0$ si $b \leq x - na < a$; tome luego el límite $b \to 0$ y $-V_o \to -\infty$, manteniendo bV_o constante. Analice la condición de cuantización para este caso y determine las bandas de energía permitidas y prohibidas.

Problema 2: *Tratamiento analítico del problema del oscilador armónico.*

a) Verifique que, cuando el potencial al que se somete una partícula de masa m es $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ (donde $\omega > 0$ es constante), la ecuación de Schrödinger puede ser escrita como

$$\psi'' + (2\varepsilon - y^2)\,\psi = 0 \ ,$$

donde $y = x(m\omega/\hbar)^{1/2}$ y $\varepsilon = E/\hbar\omega$, siendo E el correspondiente autovalor del hamiltoniano.

b) Para el límite $y \to \pm\infty$, vea que la ecuación diferencial resultante $\psi'' - y^2\psi = 0$ admite soluciones del tipo $\exp(\pm y^2/2)$. Analice entonces para la solución general (siempre en el mismo límite)

$$\psi(y) = u(y)\ \left[Ae^{-y^2/2} + Be^{y^2/2}\right]$$

qué condiciones deben imponerse a $u(y)$ y a las constantes A y B.

c) Una alternativa para resolver la ecuación diferencial resultante para $u(y)$ es proponer

$$u(y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, y^k$$

y buscar la relación que debe haber entre los coeficientes C_k. Agrupando los términos de mismo orden en y, encuentre la relación de recurrencia

$$C_{k+2} = C_k\, \frac{2k + 1 - \varepsilon}{(k+2)(k+1)}$$

d) Analice nuevamente los límites $y \to \pm\infty$ para ver que los únicos valores permitidos para ε son $2n + 1$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$, obteniendo así el espectro de energías.

e) Vea entonces que la ecuación diferencial mencionada en c) para cada n es satisfecha por el polinomio de Hermite H_n. Encuentre la expresión general para las autofunciones

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\,\hbar\,2^{2n}n!^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) H_n\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x\right]$$

Problema 3: *La función generatriz para los polinomios de Hermite.*

a) Muestre la relación de recurrencia

$$H_n'(y) = 2nH_{n-1}(y)\ .$$

b) La función generatriz se define como

$$F(y,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} s^n\ .$$

Utilizando la ecuación de recurrencia verificada en el punto a) obtenga una ecuación diferencial en y para F. Muestre que su solución es

$$F(y,s) = e^{-s^2+2sy}$$

c) Utilice la función generatriz para mostrar que

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,y^n} e^{-y^2}\ .$$

Problema 4: Encuentre, a partir de la base de las potencias de x y la condición de ortonormalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} a_n(x)\, a_m(x)\,\mathrm{d}\,x = \delta_{n,m}$$

una base ortonormal $\{a\}$ mediante el método de Gram-Schmidt.

Problema 5: Resuelva las ecuaciones de movimiento para x y p en la representacón de Heisenberg.

Problema 6: Verifique que si $p(t)$ y $q(t)$ son, respectivamente, el momento y la posición de un oscilador armónico clásico de masa m y frecuencia angular ω, entonces la función de onda

$$\psi(x,t) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} e^{i\phi(t)} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}[x-q(t)]^2 + i\frac{p(t)x}{\hbar}\right\}$$

es solución de la ecuación de evolución de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico asociado si se elige ϕ apropiadamente. Calcule los valores esperados de posición y momento, las dispersiones respectivas y el producto de las incertezas. Interprete.

Problema 7: Para los autoestados $|m\rangle$ y $|n\rangle$ del oscilador armónico calcule $\langle m|a^\dagger|n\rangle$ y $\langle m|a|n\rangle$. Evalúe $\Delta X \cdot \Delta P$ para el estado $|n\rangle$.