Mecánica Cuántica I

Guía 8 - Junio 2000

Problema 1: Considere una partícula de masa m en el potencial central $V(r) = -Ae^{-r/a}$ donde A y a son constantes positivas. Analice el espectro discreto del Hamiltoniano. Uno quiere contestar las siguientes preguntas: ¿hay estados ligados?; ¿cuántos?; ¿qué multiplicidad tienen?; ¿cómo dependen las energías de estos estados de los parámetros del potencial?; ¿qué características tienen las autofunciones asociadas?; etc.

Sugerencias:

• Parta de la ecuación radial reducida para $u(r) = rR(r)$ buscando soluciones con energía $E \leq 0$ (¿por qué no hay estados ligados con $E > 0$?) y con las condiciones de contorno y de integrabilidad adecuadas.

• Introduciendo la transformación de variable $x = e^{-r/(2a)}$, determine la ecuación diferencial para $y(x) = u(-2a\ln(x))$ junto con las condiciones de contorno e integrabilidad.

• Observe que en términos de la variable cx para una constante apropiada c (que depende de los parámetros del potencial), la ecuación diferencial obtenida es la ecuación diferencial de Bessel

$$z^2 \frac{d^2w}{dz} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0$$

donde, en nuestro caso $\nu = \nu_E$ depende de la energía y de los parámetros del potencial.

• Sabiendo que la solución general de esta ecuación es

$$C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z) \ , \quad (C_1, C_2 \text{ complejos arbitrarios}) \ ,$$

donde la función de Bessel J_ν y la función de Weber Y_ν tienen el siguiente comportamiento cerca de $z = 0$

$$J_\nu(z) \sim z^\nu \ , \ \ Y_\nu(z) \sim z^{-\nu} \ ;$$

deduzca que la función de Weber debe deescartarse y que

$$J_{\nu_E}(c) = 0 \ .$$

• Para terminar el análisis, deberá informarse adecuadamente sobre los ceros de las funciones de Bessel J_ν (ver por ejemplo: G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, Cambridge 1995 —reimpresión de la segunda edición de 1944). Un resumen escuetísimo de todo lo que se sabe sobre estos bichos es:

∘ Para $\nu \geq 0$, J_ν tiene infinitos ceros positivos (además del cero en 0) que son todos simples y no tienen puntos de acumulación. O sea si $\{j_{\nu,n} : \ n = 1, 2, 3, \cdots\}$ son los ceros de J_ν enumerados crecientemente, se tiene $\lim_{n\to\infty} j_{\nu,n} = \infty$.

∘ La función $0 \leq \nu \mapsto j_{\nu,n}$ es creciente para $n = 1, 2, 3, \cdots$.

∘ $j_{0,1} \approx 2.40482$ (Euler).

Problema 2: Si el potencial V es real, muestre que $\psi^{(+)}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ y $\psi^{(-)}_{-\boldsymbol{k}}(r)$ son soluciones de la ecuación de Schrödinger correspondientes a estados de dispersión invertidos temporalmente.

Problema 3: Si el potencial de dispersión tiene la propiedad de invariancia traslacional $V(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}) = V(\boldsymbol{r})$, donde $\boldsymbol{R}$ es un vector constante,

a) muestre que las soluciones $\psi_{\boldsymbol{k}}^{(\pm)}$ de la forma integral de la ecuación de Schrödinger son funciones de onda de Bloch, pues satisfacen la relación

$$\psi_{\boldsymbol{k}}^{(\pm)}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}\,\psi_{\boldsymbol{k}}^{(\pm)}(\boldsymbol{r}) \ ;$$

b) muestre que la amplitud de scattering se anula a menos que $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$ sea un vector de la red recíproca el cual satisface la condición

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R} \equiv (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{R} = 2\pi n \ ,$$

donde n es un entero. Ésta es la condición de Laue familiar en materia condensada.

Problema 4: Muestre que un análisis de onda parcial de la amplitud de scattering en la primera aproximación de Born da la estimación

$$\tan\delta_l \simeq -k\int_0^{\infty}[j_l(kr')]^2\; U(r')\,r'^2\,dr' \ .$$

Problema 5: a) Muestre que la sección eficaz total obtenida de la sección eficaz diferencial para el potencial de Coulomb diverge.

b) Si $V = C/r^n$, obtenga la dependencia angular de la amplitud de scattering en la aproximación de Born. Discuta la razonabilidad del resultado cualitativamente. ¿Qué valores de n dan resultados razonables?

Problema 6: Calcule la sección total de scattering para el potencial de Coulomb apantallado, $V(r) = V_o e^{-\alpha r}/\alpha\, r$ en la aproximación de Born, y discuta la exactitud de este resultado.

Problema 7: Aplique la aproximación de Born al scattering debido a un pozo cuadrado. Calcule y grafique la secciones diferencial y total.