Pequeñas Oscilaciones

Oscar Reula

30 de abril de 2007

1. Introducción

Supongamos que tenemos un sistema dinámico y queremos analizar el comportamiento de las soluciones alrededor de soluciones de equilibrio, si las hubiera. En equilibrio las fuerzas actuantes sobre el sistema son nulas o en otras palabras el campo vectorial que define el sistema dinámico se anula en dicho punto, por lo tanto, para movimientos en la cercanía de estos puntos es suficiente quedarse con la aproximación lineal del campo alrededor del punto de equilibrio. Esto da lugar a un problema lineal a coeficientes constante. En esta nota estudiaremos dicho problema.

Sea V un espacio vectorial $A : V \to V$ una matriz, queremos estudiar las soluciones al sistema:

$$\frac{dU}{dt} = AU$$

La solución de dicho sistema con condiciones iniciales U_0 en $t = 0$ es:

$$U(t) = e^{At}U_0$$

donde

$$e^A := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} := I + A + A^2/2 + \cdots$$

Ejercicio: Constate que efectivamente con esta definición $U(t) = e^{At}U_0$ es solución de $\frac{dU}{dt} = AU$. [Suponga que la serie es lo suficientemente convergente (lo es) como para poder pasar de la derivada de la seria a la serie de las derivadas término a término de la misma.]

Claro que en principio esta forma de la solución no ayuda mucho pues hay que construir la exponencial de una matriz. Pero vemos que en muchos casos de interés esto es bastante simple. Si la matriz A es diagonalizable entonces existe una trasnformación S tal que $\Lambda := SAS^{-1}$ es diagonal. Es decir

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde los λ_i son los autovalores de A.

Luego $V := SU$ satisface

$$\frac{dV}{dt} = S\frac{dU}{dt} = SAU = SAS^{-1}V = \Lambda V$$

Es decir, componente a componente tenemos:

$$\frac{dV^i}{dt} = \lambda_i V^i$$

y por lo tanto las componentes tienen la siguiente dependencia temporal:

$$V^i(t)e^{\lambda_i t}V_0^i$$

Si los autovectores de A estan dados por vectores $\{U_i\}$, $i = 1..n$, es decir, satisfacen $AU_i = \lambda_i U_i$ (sin suma sobre i), entonces la solución general en la base original se escribe como:

$$U(t) = \sum_{l=1}^{n} e^{\lambda_l t} C^l U_l$$

donde las $\{C^l\}$ son constantes a determinar de los datos iniciales: ($C^l = \Theta^l(U_0)$, donde los $\{\Theta^l\}$ son la co-base de la base de autovectores de A, $\{U_i\}$ (es decir $\Theta^l(U_i) = \delta^l{}_i$.

Aplicaremos ahora estos desarrollos a un ejemplo simple.

2. Ejemplo Unidimensional: oscilador armónico

Supongamos que tenemos un péndulo. Luego la ecuación de evolución del mismo es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$$

Si queremos estudiar el movimiento cerca del punto de equilibrio estable, es decir cerca de $\theta = 0$, podemos aproximar $\sin(\theta) \approx \theta$ y en esa approximación la ecuacion resulta la del oscilador armónico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

donde $\omega^2 := \frac{g}{l}$.

Para llevarlo a la forma de sistema de primer orden introducimos una nueva variable proporcional a la derivada temporal de θ, que por razones de simplicidad elejimos como $v = \omega\frac{d\theta}{dt}$, formando el vector $U := (\theta, v)$ obtenemos el siguiente sistema:

$$\frac{d}{dt}U := \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = AU \tag{2}$$

Para obtener los autovalores substraemos λI a A y calculamos su determinante, los autovalores estarán dados por aquellos valores de λ tales que el determinante se anula. Tenemos:

$$\det(A - \lambda I) := \det \begin{pmatrix} -\lambda & \omega \\ -\omega & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 \tag{3}$$

y por lo tanto los autovalores son $\lambda_\pm = \pm i\omega$. Utilizando estos valores encontramos que los autovectores asociados a los mismos son:

$$U_\pm := \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \tag{4}$$

en efecto, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \omega \\ -\omega & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega \\ -\omega \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{5}$$

Estos dos autovalores son linealmente independientes y por lo tanto forman una base del espacio vectorial. La co-base a la base generada por los autovalores, es decir el conjunto de co-vectores $\{\theta_\pm\}$ tales que $\theta^+(U_+) = 1$, $\theta^+(U_-) = 0$, $\theta^-(U_-) = 1$, $\theta^-(U_+) = 0$, esta dada por: $\theta^\pm = \frac{1}{2}(1, \mp i)$.

Constatemos ahora lo dicho anteriormente:
Si escribimos un vector como $U = v^+U_+ + v^-U^-$ las componentes estan dadas por,

$$v^+ = \theta^+(V) = \frac{1}{2}(\theta - iv) = \frac{1}{2}(\theta - i\dot{\theta}/\omega) \quad v^- = \theta^+(V) = \frac{1}{2}(\theta + iv) = \frac{1}{2}(\theta + i\dot{\theta}/\omega)$$

y utilizando las ecuaciones anteriores tenemos,

$$\dot{v^+} = \frac{1}{2}(\theta - i\dot{\theta}/\omega)^{\cdot} = \frac{1}{2}(\dot{\theta} - i\ddot{\theta}/\omega) = \frac{1}{2}(\theta + i\omega\dot{\theta}) = i\omega\frac{1}{2}(\theta - i\dot{\theta}/\omega) = i\omega v^+$$

es decir la evolución temporal de la función v^+ esta dada por la solución a esta ecuación diferencial:

$$v^+(t) = e^{i\omega t}v^+(0)$$

similarmente encontramos que v^- satisface $\dot{v^-} = -i\omega v^-$ y por lo tanto su evolución temporal esta dada por,

$$v^-(t) = e^{-i\omega t}v^-(0)$$

Luego el vector solución a nuestro sistema será:

$$U(t) = v^+(t)U^+ + v^-(t)U^- = e^{i\omega t}v^+(0)U^+ + e^{-i\omega t}v^-(0)U^-$$

recordando que $v^\pm(0) = \theta^\pm(U(0))$. En particular, la primer componente de este vector es la variable es θ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \theta(t) &= e^{i\omega t}v^+(0) + e^{-i\omega t}v^-(0) \\ &= e^{i\omega t}\frac{1}{2}(\theta(0) - i\dot{\theta}(0)/\omega) + e^{-i\omega t}\frac{1}{2}(\theta(0) + i\dot{\theta}(0)/\omega) \\ &= \theta(0)\cos(\omega t) + \frac{\dot{\theta}(0)}{\omega}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

3. Ejemplo Unidimensional: oscilador armónico con disipación

Si tenemos disipación, por ejemplo por roce, entonces modelamos el sistema con la siguiente ecuación:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta - 2\beta\dot{\theta}$$

donde $\beta > 0$ es una constante. En efecto, esta ecuación describe aproximadamente la disipación, y la energía del oscilador decae como:

$$\frac{d}{dt}E := \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2) = \dot{\theta}(\ddot{\theta} + \omega^2\theta) = -2\beta\dot{\theta}^2$$

Definiendo las variables como para el caso no-disipativo obtenemos el siguiente sistema de primer orden:

$$\frac{d}{dt}U := \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -2\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = AU \tag{6}$$

Nuevamente miramos el determinante de

$$\det(A - \lambda I) := \det\begin{pmatrix} -\lambda & \omega \\ -\omega & -\lambda - 2\beta \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda 2\beta + \omega^2 \tag{7}$$

y por lo tanto los autovalores son,

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

Tenemos aqui dos casos:

- $\beta < \omega$ luego

  $$\lambda_{\pm} = -\beta \pm i\tilde{\omega} \quad \text{con} \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$$

  y tenemos un movimiento oscilatorio dentro de una embolvente que decae exponencialmente con factor $-\beta$.

- $\beta > \omega$ luego

  $$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} < 0$$

  y tenemos decaimiento puro, tenemos dos modos con distintas cotas de decaimiento, notese que para $\omega \to 0$ tenemos $\lambda_+ \to 0$ mientras que $\lambda_- \to 2\beta$.

Veamos ahora el caso límite en que $\omega = \beta$. Consideraremos la solución con $\beta \neq \omega$ y recuperaremos la con $\beta = \omega$ tomando el límite de la misma. Para $\beta \neq \omega$ no necesitamos calcular los autovectores y su co-base para este sistema tan simple. Ya sabemos que la solución será de la forma:

$$\theta(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$$

con A y B constantes a determinar de los datos iniciales. Tenemos,

$$\begin{aligned}\theta(0) &= A+B \\ \dot{\theta(0)} &= \lambda_+ A + \lambda_- B\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}A &= \frac{\dot{\theta(0)} - \lambda_- \theta(0)}{\lambda_+ - \lambda_-} \\ B &= \frac{-\dot{\theta(0)} + \lambda_+ \theta(0)}{\lambda_+ - \lambda_-}\end{aligned}$$

Luego, cerca de $\omega = \beta$ tenemos,

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}((\dot{\theta(0)} - \lambda_-\theta(0))e^{\lambda_+ t} + (-\dot{\theta(0)} + \lambda_+\theta(0))e^{\lambda_- t}) \\ &= \frac{e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-}((\dot{\theta(0)} - \lambda_-\theta(0)) + (-\dot{\theta(0)} + \lambda_+\theta(0))e^{(\lambda_- - \lambda_+)t}) \\ &= \frac{e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-}((\dot{\theta(0)} - \lambda_-\theta(0)) + (-\dot{\theta(0)} + \lambda_+\theta(0))(1 + (\lambda_- - \lambda_+)t + O((\lambda_- - \lambda_+)t)^2)) \\ &= e^{\lambda_+ t}(\theta(0) + (\dot{\theta(0)} - \lambda_+\theta(0))t) + O((\lambda_- - \lambda_+)t)) \qquad (8)\end{aligned}$$

y por lo tanto en el límite $\omega = \beta$ vemos que tenemos un crecimiento que no es puramente lineal ni sinusoidal sino que aparece un término de crecimiento lineal (luego dominado por la exponencial):

$$\theta(t) = e^{-\beta t}(\theta(0) + (\dot{\theta(0)} + \beta\theta(0))t)$$

Ejercicio: Constate que las condiciones iniciales se cumplen idénticamente también para la solución límite.
Ejercicio: Encuentre los autovectores para este sistema. Que pasa cuando $\beta = \omega$?

4. Sistemas lineales de segundo orden, reducción a primer orden

En general los sistemas dinámicos aparecen como sistemas de segundo orden. Esto se debe a que estamos dando la aceleración en término de fuerzas. En ausencia de disipación entonces las derivadas segundas están relacionadas con las posiciones y por lo tanto el sistema es de la forma

$$\ddot{x} = Ax$$

donde $x \in V$, un espacio vectorial de dimensión n. Para tratar este sistema lo llevamos a primer orden donde ya conocemos la solución, es decir, si definimos $v = \dot{x}$ entonces el sistema resulta,

$$\frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} U \tag{9}$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \tag{10}$$

Veamos como son los autovectores de este sistema. Si $U = (u_1, u_2)$ es un autovector con autovalor s, entonces la ecuación de autovectores implica que,

$$\begin{aligned} u_2 &= su_1 \\ Au_1 &= su_2 \end{aligned}$$

Utilizando la primera ecuación en la segunda tenemos que,

$$Au_1 = s^2 u_1$$

Tenemos asi que u_1 es entonces un autovector de A y por lo tanto $s = \pm\sqrt{\lambda}$ donde λ en el correspondiente autovalor de A. Por lo tanto vemos que por cada par autovalor-autovector (u_i, λ_i) tenemos un par de pares de autovalores-autovectores del sistema inicial, $U_i^{\pm} = (u_i, \pm\sqrt{\lambda_i} u_i)$, $s_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$.

Por lo tanto la solución general del sistema esta dada por

$$U(t) = \sum_{i=1}^{n} [c_i^+ e^{\sqrt{\lambda_i} t} U_i^+ + c_i^- e^{-\sqrt{\lambda_i} t} U_i^-]$$

y en particular tendremos que:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} [c_i^+ e^{\sqrt{\lambda_i} t} + c_i^- e^{-\sqrt{\lambda_i} t}] u_i]$$

Ejercicio: Encuentre la co-base correspondiente a la base de autovectores, exprese con su ayuda a las constantes $c_i^{\pm}$.