

DIALOGO SOBRE LAS APLICACIONES DE LA MATEMATICA

*Alfred Renyi*

Esta es la continuación de la serie de diálogos traducidos por el Profesor Edgardo Fernandez Stacco.

ARQUIMEDES: ¡Vuestra Majestad! ¡Qué sorpresa a estas horas!  
¿A qué debo el honor de una visita del Rey Herón a mi modesto hogar?

HERON: Mi querido Arquimedes, esta noche hemos tenido una cena en mi palacio para celebrar el gran triunfo de nuestra pequeña ciudad, Siracusa, sobre los poderosos romanos. Te he invitado, pero tu lugar permaneció vacío. ¿Por qué no has venido tú, a quien más que a nadie debemos la victoria de hoy? Tus enormes espejos cóncavos de bronce incendiaron diez de los veinte grandes navíos de los romanos; ellos partieron raudamente como igneas antorchas fuera del puerto con el viento del sudoeste y todos se hundieron antes de alcanzar el mar abierto. No podía retirarme a descansar sin agradecerte el haber liberado nuestra ciudad del enemigo.

ARQUIMEDES: Ellos pueden volver, y aún estamos rodeados por tierra firme

HERON: Hablaremos al respecto más tarde. Primero, permíteme entregarte un obsequio, el mejor que puedo darte.

ARQUIMEDES: Los relieves muestran, supongo, las aventuras de Odiseo. En el centro veo a los confiados troyanos empujando el gigantesco caballo de madera dentro de su ciudad. Siempre me he preguntado si los troyanos usaron alguna clase de aparejo compuesto para lograrlo. Por supuesto, el caballo tenía ruedas, pero la ruta a la ciudad debía ser bastante escarpada.

**HERON:** Querido Arquímedes, por Zeus, olvida tus poleas por un momento. Tú sabes cuán asombrado quedé cuando tú solo procediste a la botadura del pesado barco que deseaba enviarle al Rey Ptolomeo, simplemente girando la manija de tu polea triple. Pero, observa las otras escenas de la bandeja.

**ARQUIMEDES:** Reconozco a Cíclope, a Circe cuando transforma a los compañeros de Odiseo en cerdos, y aquí el concierto de las sirenas a quienes Odiseo escuchaba mientras estaba encadenado al mástil de su barco (si miras su rostro casi puedes oír las seductoras canciones). Y aquí está Odiseo en el otro mundo, encontrándose con la sombra de Aquiles, aquí él está espantando el hechizo de Nausica y sus mujeres, y finalmente, por supuesto, la escena donde Odiseo, disfrazado como un viejo pordiosero, tensa su arco y arregla sus cuentas con sus rivales, una obra de arte maravillosa. Te lo agradezco, mi generoso rey; es ciertamente un presente real.

**HERON:** Era la mejor pieza de mi tesoro, pero tú te la mereces. La elegí, no solamente por su belleza y valor, sino por una tercera razón. Lo que tú hiciste hoy por Siracusa puede compararse únicamente con el ardid de Odiseo. Ambos son triunfos del pensamiento sagaz sobre la fuerza bruta.

**ARQUIMEDES:** Haces sonrojar a un hombre mayor. Pero permíteme recordarte nuevamente que la guerra no ha terminado. ¿Desearías escuchar los consejos de un anciano?

**HERON:** Y te lo ordeno, como tu rey; dime tu opinión francamente.

**ARQUIMEDES:** Este es el momento en que deberías hacer la paz con los romanos; desde que comenzó la guerra, nunca hemos estado en tan favorable posición para negociar. Si Marcelo no envía su mensajero ante tí antes de la medianoche, tú debes enviarle los tuyos antes del alba, y acordar la paz antes que el sol salga nuevamente. Marcelo está impaciente por retirar las tropas que asedian a la ciudad

porque las necesita para utilizarlas en contra de Aníbal. Además, si él puede llegar a un acuerdo mañana, está en condiciones de informar a Roma una victoria, aunque sea diplomática, y no solamente la mala noticia de que ha perdido la mitad de su flota. Cuando el informe sobre la batalla de hoy llegue a Roma, los romanos se pondrán tan furiosos que no estarán satisfechos con nada que no sea la victoria total.

HERON: Tu análisis es correcto. En efecto, recibí un mensaje de Marcelo esta tarde en el cual me ofrece la paz y el retiro de sus tropas bajo ciertas condiciones. Si tu conocieras esas condiciones, estarías menos ansioso de llegar a un acuerdo con los romanos.

ARQUIMEDES: ¿Qué es lo que desea Marcelo?

HERON: Bien, por supuesto él pretende mucho oro y plata. También desea diez barcos nuevos por los diez que hoy echamos a pique, y además que todas nuestras fortalezas sean demolidas excepto una de ellas en la cual quedaría apostada una guarnición de soldados romanos. También son sus deseos que nosotros declaremos la guerra a Cartago, y finalmente, pretende que mi hijo Gelón y mi hija Helena sean sus rehenes. El promete, a cambio, que no se le hará ningún daño a la ciudad y a sus habitantes durante la permanencia del tratado.

ARQUIMEDES: Quizás él no insistirá en todo, aunque seguramente pedirá que me entregues.

HERON: Tú hablas serenamente sobre ello. Por todos los dioses del Olimpo, mientras esté vivo no entregaré a mis hijos en manos del enemigo, ni tampoco te entregaré a tí. No quiero decir el oro y la plata, eso pueden lograrlo. Pero en lo que no estoy de acuerdo sobre sus condiciones es que si nosotros las cumplimos, estaremos completamente a su merced ¿Qué garantías hay de que él cumplirá lo pactado?. El no me entrega ninguna persona en calidad de rehén.

ARQUIMEDES: Tenga usted mucho cuidado en no preguntarse si

él mantendrá su palabra; los romanos son sensibles a su honor, por lo menos durante las negociaciones, pero quizás puedas evitar entregar a tus hijos.

HERON: ¿Y sobre tí? ¿Estarías presto a realizar este sacrificio por tu ciudad?

ARQUIMEDES: ¿Es una pregunta o una petición?

HERON: Una pregunta solamente ¿Deseas saber qué le respondí a Marcelo?

ARQUIMEDES: ¿Ya le has respondido?

HERON: Sí. He aceptado todas sus condiciones excepto entregarte a tí como rehén; pero estoy de acuerdo en dar a mis hijos como rehenes solamente bajo la condición de que me envíe a dos de sus hijos en calidad de tales. En cuanto a tí, le he dicho que tu edad no permite que vivas en campaña. Sin embargo, sabiendo que él no te solicita a tí como rehén, sino que desea solamente tu sabiduría, prometí que tú le harías por escrito una descripción detallada de todos tus inventos que tienen importancia militar.

ARQUIMEDES: Nunca escribiré nada sobre mis invenciones que tengan que ver con la guerra.

HERON: ¿Por qué no?. Si hay paz, no necesitaremos más nada de ello. Explicame por qué te niegas a escribir sobre tus inventos.

ARQUIMEDES: Lo haré, si tienes paciencia para escuchar mis razones.

HERON: Estoy presto a escucharte. Deseo permanecer despierto aguardando la respuesta de Marcelo.

ARQUIMEDES: Disponemos entonces de mucho tiempo, porque le tomará un rato a Marcelo formular su respuesta.

HERON: ¿Piensas que no continuará las negociaciones?

ARQUIMEDES: Por supuesto, impugnaste su honor. El nunca lo olvidará, y no habrá acuerdo alguno.

- HERON: Puede que tengas razón.
- ARQUIMEDES: Siempre he admirado tu hábil diplomacia y tu percepción psicológica sobre el corazón de tus oponentes. Pero en esta ocasión has despreciado este arte.
- HERON: Debo admitirlo. Quizás haya estado demasiado embriagado de vino y victoria. Pero lo hecho, hecho está. Aún deseo escuchar tus razones.
- ARQUIMEDES: Aunque la cuestión llegue a ser académica, sin embargo, explicitaré mi punto de vista. Has comparado mis máquinas con el caballo de Troya. Bien, tu comparación es realmente aproximada, pero en un sentido muy diferente. Odiseo utilizó el caballo de madera para entrar de contrabando junto a sus soldados a la ciudad de Troya. Yo usé mis máquinas para pasar una idea a la opinión pública del mundo griego. La idea es que la matemática, no solamente sus elementos, sino también sus partes más sutiles, pueden aplicarse con éxito para propósitos prácticos. Debo confesar que he dudado mucho antes de hacerlo porque odio la guerra y la muerte. Pero la guerra llegó hasta aquí, y esa fue la única manera de que me comprendieran. He tentado otras vías, pero en vano. Puedo recordarte a tí, que hace algunos años cuando inventé una bomba para extraer el agua de las minas, de manera tal que las personas que allí trabajan no estuvieran con el agua hasta las caderas, no prestó atención. El supervisor de sus minas me dijo que a él lo tenía sin cuidado que las piernas de los esclavos estuvieran mojadas, ya que no estaban hechas de sal ¡Esas fueron sus palabras! ¿Y recuerda usted cuándo propuse construir una máquina para irrigar vuestros campos? Me contestaron que el trabajo esclavo era más barato. ¿Y cuando propuse utilizar la fuerza del vapor para mover los molinos del Rey Ptolomeo, ¿cuál fue su respuesta?. Dijo que los molinos que habían sido útiles a sus antepasados, serían útiles para él también. ¿Debo recordar otros ejemplos?. Hay por lo menos una docena de ellos. Todos mis esfuerzos por probar al mundo

lo que puede hacer la matemática por ellos en tiempos de paz fueron en vano. Pero tan o qué pronto como se aproximaba la guerra, de inmediato recordó mis poleas, engranajes y palancas. Mientras reinaba la paz mis inventos eran considerados como juguetes, indignos de los grandes ciudadanos, y menos aún de un filósofo. Aún usted, que siempre me ha apoyado y me ayudó a realizar mis ideas, no las tomó demasiado en serio; las mostró a sus invitados para entretenerlos, pero eso fue todo. Entonces llegó la guerra y los barcos romanos bloquearon el puerto; además casualmente la opinión de que lanzando piedras sobre ellos con una catapulta podríamos alejarlos; usted tomó la idea rápidamente. No pude retractarme de lo que había dicho, y tuve que seguir adelante. Una vez que tomé ese camino, debí continuar. Pero mis sentimientos sobre el particular fueron, desde un principio, contradictorios. Estaba feliz, por supuesto, al ver que mis invenciones no serían ya nunca más ridiculizadas, y que al menos tenía la oportunidad de demostrarle al mundo qué es realmente la matemática en acción. Pero éstas no eran la clase de acciones por las cuales yo deseaba demostrar el valor práctico de las ideas matemáticas. He visto hombres muertos por mis máquinas y ello me ha hecho sentir culpable.

He hecho un solemne juramento a Atenea en el sentido de que nunca divulgaría el secreto de mis máquinas de guerra, ya sea en palabras o a través de mis escritos. He tratado de tranquilizar mi conciencia diciéndome que las noticias sobre Arquímedes derrotando a los romanos por medio de la matemática alcanzarían todos los rincones del mundo griego, y que esto sería recordado aún cuando la guerra hubiese terminado y los secretos de mis máquinas de guerra hubiesen sido enterrados conmigo.

Es cierto, querido Arquímedes, he recibido cartas de reyes amigos preguntándome sobre tus invenciones.

ARQUIMEDES: ¿Qué has respondido?

HERON: Les he dicho que esas cuestiones no pueden

divulgarse mientras la guerra continúa.

ARQUIMEDES: Espero que comprenda ahora cuáles son mis razones para no publicitar mis secretos. He tenido éxito en mantenerlos ocultos aún a mis allegados que realizan mis planos. Cada hombre conoce solamente sobre algunos detalles. Me alegro de que usted nunca me haya interrogado sobre estas cuestiones, porque me hubiera negado a contestar.

HERON: Pero ahora te plantearé algunos interrogantes. No temas, no te preguntaré sobre tus secretos, sino solamente sobre los principios básicos fundamentales.

ARQUIMEDES: Creo que puedo responder tales cuestiones sin faltar a mi juramento.

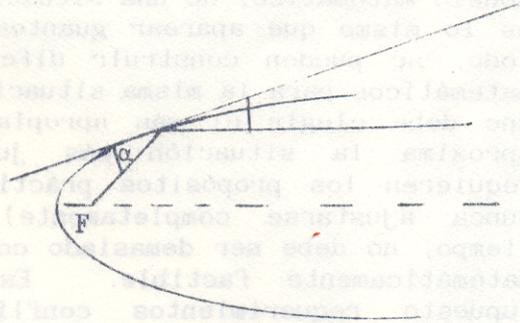
HERON: Antes de comenzar, deseo preguntarte algo. ¿Por qué era tan importante para tí que fueran aceptadas tus ideas sobre la utilidad de la matemática?

ARQUIMEDES: Quizás fuera un necio, pero pensaba que podía cambiar el curso de la historia. Me preocupaba el futuro de nuestro mundo griego. Pensaba que, si aplicábamos la matemática en gran escala -después de todo, la matemática es una invención griega, y pienso que es el mejor logro del espíritu griego- en condiciones de salvar nuestro modo de vida. Me doy cuenta ahora que es muy tarde. Los romanos conquistarán no solamente Siracusa sino también las restantes ciudades griegas; nuestro momento ha pasado.

HERON: Aún si así fuera, la cultura griega no se perderá: los romanos la tomarán para sí. Observa cómo tratan de imitarnos actualmente. Copian nuestras estatuas, traducen nuestra literatura y has visto cómo Marcelo está interesado en tu matemática.

ARQUIMEDES: Los romanos nunca la llegarán a entender. Tienen un pensamiento estrechamente práctico, y no están interesados en ideas abstractas.

- HERON: Ciertamente ellos están interesados en sus aplicaciones prácticas.
- ARQUIMEDES: Pero ambas cosas no pueden estar separadas. Uno debe ser un visionario de ensueños para aplicar la matemática con posibilidades de éxito.
- HERON: Esto me suena bastante paradójico. Pienso que para aplicar la matemática se debe poseer primero un sentido práctico adecuado. Esto me conduce a la primera pregunta. ¿Cuál es realmente el secreto de la nueva ciencia que tú has inventado -me permites llamarla matemática aplicada-? ¿Y cuál es la principal diferencia entre tu matemática aplicada y esa clase de matemática -llamémosla matemática pura- que se enseña en las escuelas?.
- ARQUIMEDES: Lamento tener que contrariarte. No existe otra clase de matemática además de la que tus maestros te enseñaron, y no sin éxito, como puedo recordar. La matemática aplicada, como un arte diferente y separado de la matemática como un todo ¡no existe! Mi secreto está bien guardado porque no es tal; su evidencia es su mejor máscara. Está oculto como una moneda de oro arrojada en el polvo de los caminos.
- HERON: ¿Quieres decir que tus máquinas maravillosas se basan en una clase de matemática que todo hombre educado conoce?
- ARQUIMEDES: Estás muy próximo a la verdad.
- HERON: ¿Puedes darme un ejemplo?
- ARQUIMEDES: Bueno, podemos tomar como ejemplo los espejos que hoy han realizado tan buen trabajo. Lo que hice fue simplemente recordar una propiedad bien conocida de la parábola: toma cualquier punto P de la parábola, lo unes al foco y trazas una paralela al eje por P. Estas rectas forman ángulos iguales con la tangente a la parábola en el punto P. Puedes encontrar este teorema en los libros de mis distinguidos colegas de Alejandría.



HERON: Es difícil creer que hayas destruido la mitad de la flota de Marcelo con este teorema, que es uno de los cientos que contienen proposiciones geométricas similares. Lo recuerdo vagamente, aunque olvidé su demostración.

ARQUIMEDES: Es probable que cuando escuches una de sus ingeniosas demostraciones lo comprendas, y quizá aún admires su belleza y elegancia, pero eso fue todo. Algunos matemáticos van un paso más allá; ellos investigan algunas de sus consecuencias puramente geométricas, o inventan nuevas demostraciones, pero allí se detienen. Yo simplemente he ido justamente un paso más adelante; y observado también sus consecuencias no matemáticas.

HERON: Pienso que has inventado nuevas leyes de óptica.

ARQUIMEDES: La óptica es, después de todo nada más que una rama de la geometría. Lo que he utilizado de la óptica, la ley de reflexión de un rayo, era conocida desde hace mucho tiempo.

HERON: Quieres decir que para aplicar matemática no es necesario obtener nuevos resultados, solamente ajustar a una situación práctica y su contraparte matemática, alguna proposición matemática bien conocida.

ARQUIMEDES: No, no es tan simple. Ocurre a menudo que el teorema que necesitamos no existe, y uno debe encontrarlo y probarlo por sí mismo. Pero aún si ello no es necesario, encontrar la contraparte matemática, yo prefiero llamarlo un

modelo matemático, de una situación práctica no es lo mismo que aparear guantes. Primero de todo, se pueden construir diferentes modelos matemáticos para la misma situación práctica, y uno debe elegir el más apropiado, aquél que aproxima la situación más justamente como requieren los propósitos prácticos (no puede nunca ajustarse completamente). Al mismo tiempo, no debe ser demasiado complicado, pero matemáticamente factible. Estos son, por supuesto requerimientos conflictivos y un delicado balance de ambos es usualmente necesario. Debemos aproximarnos tanto como podamos a la situación real en todos los aspectos importantes para nuestros propósitos, y dejar de lado todo aquello que no es de importancia para nuestros objetivos actuales. Un modelo no debe ser necesariamente similar al real en todos los aspectos, solamente en aquellos que realmente cuentan. Por otra parte, el mismo modelo matemático puede ser utilizado para adecuar diferentes situaciones prácticas. Por ejemplo, también he utilizado las propiedades de las parábolas para construir catapultas, ya que el curso de una piedra lanzada por una catapulta puede aproximarse en buena medida por una parábola. También utilicé parábolas para calcular cuán profundo se sumergiría un barco en el mar bajo el peso de su carga. Por supuesto, la sección transversal del barco no es exactamente de la misma forma que la de una parábola, pero un modelo más real no sería matemáticamente manejable. Sin embargo, los resultados estuvieron en gran medida de acuerdo con los hechos. Especialmente, pude encontrar bajo qué condiciones el barco sería capaz de mantenerse vertical contra los embates del viento y de las olas, porque su centro de gravedad se colocaba en la posición más baja posible. Tratando de describir una situación tan complicada, aún un modelo muy grosero es de utilidad, porque da, por lo menos, resultados cualitativos correctos, y ellos pueden ser de mayor importancia práctica que los resultados cuantitativos. Mi experiencia me ha enseñado que aún en el caso de un modelo matemático imperfecto, éste nos ayuda a comprender mejor

la situación práctica, porque tratando de formular el modelo matemático estamos forzados a pensar sobre todas las posibilidades lógicas, a definir todas las nociones sin ambigüedades, y a distinguir entre los factores importantes de los secundarios. Aún si el modelo matemático nos conduce a resultados -que no están de acuerdo con los hechos,- puede ser de mucha utilidad, porque el fracaso de un modelo nos puede ayudar a encontrar uno mejor.

HERON: Me parece que la matemática aplicada es similar a la guerra: a veces una derrota es de más valor que una victoria, ya que ella nos ayuda a darnos cuenta de lo inadecuado de nuestro armamento o de nuestra estrategia.

ARQUIMEDES: Ahora .....

HERON: Dime algo más sobre tus espejos.

ARQUIMEDES: Ya le he expresado la idea básica. Luego que acerté con la idea de usar la propiedad mencionada de la parábola, tuve que resolver la cuestión de cómo vaciar y pulir un espejo de metal en la forma de un paraboloide de revolución cóncavo, pero prefiero no hablar sobre ello. Por supuesto, tuve también que seleccionar una aleación conveniente.

HERON: Sin inmiscuirme en tus secretos, es claro que además de las propiedades de las parábolas tú debías saber mucho sobre los metales y el arte de tratar con ellos. Esto muestra, me parece, que los conocimientos matemáticos no son suficientes para alguien que desea aplicarlos. ¿Un hombre que quiera aplicar la matemática está en una posición similar al que desea cabalgar dos corceles al mismo tiempo?

ARQUIMEDES: Yo cambiaría ligeramente tu analogía: aquél que desea aplicar la matemática es como el hombre que pretende atar dos caballos a su carruaje. No hay ninguna dificultad en hacerlo. Por supuesto, es necesario algún conocimiento sobre los caballos así como sobre el carruaje, pero cualquiera de tus cocheros posee ese conocimiento.

- HERON: Estoy un poco confundido: Toda vez que pienso que la matemática aplicada es misteriosa, tú me demuestras que es en realidad bastante simple; pero cuando estoy convencido de que todas las cosas son realmente simples, tú señalas que es mucho más complicado que lo imaginado.
- ARQUIMEDES: Sus principios son obvios, pero los detalles, a veces, son un poco complicados.
- HERON: Aún no he comprendido qué quieres significar cuando te refieres a un modelo matemático. Dime algo más sobre el particular.
- ARQUIMEDES: ¿Recuerdas la esfera que construí hace algunos años para imitar los movimientos del sol, la luna y los cinco planetas, mediante la cual era posible demostrar cómo ocurren en realidad los eclipses del sol y de la luna?
- HERON: Por supuesto, es una de las cosas en el palacio que muestro a todos mis visitantes; todos piensan que es maravilloso. ¿Es un modelo matemático del universo?
- ARQUIMEDES: No, yo lo llamaría un modelo físico. Los modelos matemáticos son invisibles, existen solamente en nuestras mentes y pueden ser expresados solamente por medio de fórmulas. Un modelo matemático del universo es aquél que es común al universo real y a mi modelo físico. En el modelo físico, por ejemplo, cada planeta es una pequeña esfera de tamaño aproximado al de una naranja. En mi modelo matemático del universo, los planetas están representados simplemente por puntos.
- HERON: Pienso que estoy comenzando a entender qué es un modelo matemático. Pero permíteme regresar a la analogía de los caballos. El arte de atar los caballos al carruaje y conducirlos es bastante diferente del de la crianza y cuidado de ellos. ¿No es el arte de aplicar la matemática bastante distinto del de formular y probar teoremas?
- ARQUIMEDES: Tú estás en lo cierto, por supuesto, en lo

referente a los caballos, si bien el hombre que ha criado al caballo usualmente conoce todo acerca de él y puede manejarlo mejor que ninguno. En cuanto a la matemática he recalcado anteriormente que para ser capaz de aplicarla con éxito se debe tener una comprensión profunda de ella, y si alguno desea hacer aplicaciones originales, debe ser un matemático creativo. Recíprocamente, el tratar con las aplicaciones puede ayudar mucho en la investigación matemática pura.

HERON: ¿Cómo es ello posible?. Puede darme un ejemplo?

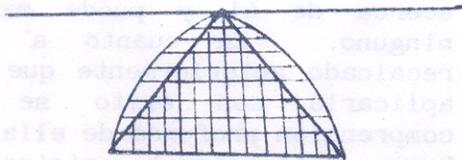
ARQUIMEDES: Quizás recuerde que hace ya algún tiempo estaba yo muy interesado en una cuestión de mecánica, en encontrar el centro de gravedad de un cuerpo. Los resultados que obtuve sobre centros de gravedad me ayudaron en la construcción de máquinas, y también me ayudaron en la demostración de nuevas proposiciones geométricas.

He desarrollado un método peculiar que consiste en investigar problemas geométricos por medio de consideraciones mecánicas en relación con los centros de gravedad. El método es de carácter heurístico; ello significa que no nos proporciona demostraciones exactas. Muchos teoremas han llegado a estar claros para mí utilizando este método de razonamiento. Por supuesto, como el método no nos da una demostración efectiva, más tarde he probado los teoremas que había predecido por medio de mi método mecánico, con los métodos tradicionales de la geometría. Es mucho más fácil completar la demostración si uno ha adquirido previamente algún conocimiento de la cuestión a través de analogías mecánicas; y por lo tanto sabe lo que debe probar.

HERON: Explícame algún teorema que hayas deducido de forma tan extraña.

ARQUIMEDES: El área de cualquier segmento de una parábola es cuatro tercios del área de un triángulo que tiene la misma base y altura. Después de haber encontrado el resultado por mi método, también

dí la demostración utilizando los métodos tradicionales.



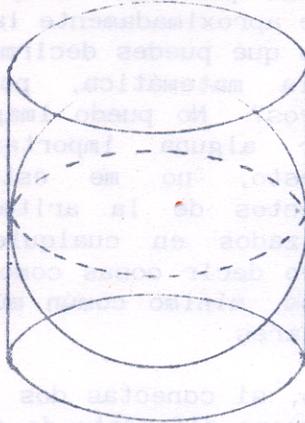
**HERON:** Si encontraste el teorema a partir de la mecánica, ¿Porqué te molestaste en hacer la demostración geométrica?

**ARQUIMEDES:** Cuando descubrí mi método, los resultados que obtuve con su ayuda no fueron del todo correctos; posteriormente, analizando los casos en los cuales el método me llevaba a conclusiones erróneas, lo desarrollé de forma tal que ahora nunca me engaña. Pero aún no he probado que todo resultado que obtengo por esta vía es realmente cierto; quizá alguien lo pruebe algún día, pero hasta que ello ocurra no tendre una confianza completa en el método.

**HERON:** ¿Pero realmente son necesarias en matemática aplicadas demostraciones exactas? Después de todo, como tú dices, el modelo matemático es solo una aproximación de la realidad. Si tú utilizas fórmulas aproximadamente correctas, los resultados serán en ese caso muy cercanos a los reales y ellos de ningún modo pueden ser absolutamente correctos.

**ARQUIMEDES:** Estás equivocado, mi rey. Justamente porque el modelo matemático es solamente una aproximación y existe siempre una cierta discrepancia con los hechos, se debe tener cuidado de no aumentar más esta discrepancia por el uso poco cuidadoso de la matemática. Se debe estar tan seguro como sea posible. A propósito, respecto a las aproximaciones, existe el falso concepto, muy generalizado, de que usar aproximaciones significa apartarse de la precisión matemática. Las aproximaciones tienen una teoría precisa, y resultados sobre aproximaciones como por ejemplo, desigualdades, deben ser probadas en forma tan rigurosa como las identidades. Quizás recuerdes la aproximación que obtuve para el área de un círculo de diámetro dado; lo

he probado con el rigor usual en geometría.



HERON: ¿Qué otros resultados has obtenido por medio del método mecánico?

ARQUIMEDES: Este método también me permitió descubrir que el volumen de la esfera es dos tercios del volumen del cilindro circunscrito.

HERON: Te he escuchado decir que cuando tú mueras, deseas que este teorema sea inscripto en la tumba. ¿Ello significa que lo consideras como tu logro más significativo?

ARQUIMEDES: Pienso que el método en sí mismo es mucho más importante que cualquiera de los resultados particulares que obtuve con su ayuda.

Recuerda cuando una vez le manifesté, refiriéndome a las palancas: "Dadme un punto de apoyo y moveré la tierra. Por supuesto, no existe un tal punto fijo en el mundo. Sin embargo, en matemática, tenemos tales puntos fijos donde apoyarnos, más precisamente los axiomas y la lógica. Aplicar la matemática a problemas del mundo real significa mover la tierra a partir del punto fijo de la matemática.

HERON: Tú siempre hablas sobre la matemática aplicada, pero todos los ejemplos que has dado son aplicaciones de la geometría. En lo que respecta a la geometría, sé ahora cómo puede ser aplicada. Por ejemplo, el funcionamiento de una máquina, depende de la forma y tamaño de sus componentes, la trayectoria de una piedra

lanzada por una catapulta, según has dicho, tiene aproximadamente la forma de una parábola. ¿Pero qué puedes decirme acerca de otras ramas de la matemática, por ejemplo, teoría de números? No puedo imaginarme cómo ella puede tener alguna importancia práctica. Por supuesto, no me estoy refiriendo a los elementos de la aritmética, los cuales son utilizados en cualquier clase de cálculos; quiero decir cosas como divisibilidad, números primos, mínimo común múltiplo y otros tópicos similares.

ARQUIMEDES: Bueno, si conectas dos engranajes cada uno con un número diferente de dientes, el mínimo común múltiplo aparece inevitablemente. ¿Te convence ese ejemplo tan simple?

Recientemente he recibido una carta de mi amigo, Eratóstenes de Cirene, en la cual se refiere a un método simple pero ingenioso, inventado por él y denominado método de la criba para encontrar números primos. Pensando sobre el particular, hice un esbozo de una máquina que materializa esta idea. La máquina trabaja con un conjunto de engranajes: cuando los giras un cierto número de veces, digamos  $n$ , observando en un orificio, si la visión es clara el número  $n$  es primo; pero si la visión está obstruida, entonces  $n$  es compuesto.

HERON: Es realmente asombroso. Cuando la guerra haya terminado, debes construir esta máquina. A mis invitados les gustará.

ARQUIMEDES: Si estoy aún con vida, ciertamente lo haré. Será la demostración de que las máquinas pueden resolver problemas matemáticos. Quizá esto ayude a los matemáticos a darse cuenta que, aún desde su propio punto de vista, ellos pueden salir ganando si estudian la relación de la matemática con las máquinas.

HERON: Hablando sobre los beneficios, recuerdo una historia sobre Euclides. Uno de sus estudiantes que hacía geometría le preguntó a Euclides: "¿Cuáles serán mis beneficios estudiando estas cosas"? De inmediato Euclides llamó a su esclavo y le dijo: "Entrégale una

moneda, ya que él desea extraer algún beneficio de aquello que aprende".  
Me parece que esta historia nos muestra que Euclides pensaba que era innecesario para un matemático preocuparse por los usos prácticos de sus resultados.

**ARQUIMEDES:** Por supuesto, he escuchado la anécdota, pero se sorprenderá cuando le diga que simpatizo completamente con Euclides. En su lugar, hubiera dicho algo similar.

**HERON:** Esto me confunde nuevamente. Hasta ahora te has referido en forma muy entusiasta a las aplicaciones de la matemática y ahora estás de acuerdo con los puristas que piensan que la única recompensa que puede aspirar un científico es el placer del conocimiento.

**ARQUIMEDES:** Pienso que usted y la mayoría de la gente no comprendieron la historia sobre Euclides. Ello significa que él no estaba interesado en las consecuencias prácticas de los resultados matemáticos y que los consideraba indignos de un filósofo. Es una cosa sin sentido: El escribí, como ciertamente sabe, un libro llamado Fenómenos sobre Astronomía y un libro de óptica y es probablemente también el autor del libro Catoptrica, que he utilizado para construir mis espejos; él estaba también interesado en mecánica. Así como yo entiendo la historia, Euclides deseaba puntualizar el hecho importante de que la matemática premia solamente a aquellos que están interesados en ella no únicamente por sus recompensas, sino también por ella misma. La matemática es como tu hija Helena, que sospecha, cada vez que aparece alguien interesado en ella, que no es por su amor, sino solamente por el interés en ser el yerno del Rey. Ella desea un esposo que la ame por su propia belleza, su talento y sus encantos y no por el bienestar y el poder que tendrá sin duda al desposarla. De la misma forma, la matemática revela sus secretos solamente a aquellos quienes a ella se aproximan por puro amor, por su propia belleza. Aquellos que así lo hacen, por supuesto, son recompensados con resultados de importancia

práctica "¿Cuál es el beneficio que puedo obtener de esto?" no irá muy lejos. Recuerda que te he dicho que los romanos nunca alcanzarán el éxito en las aplicaciones de la matemática. Bien, ahora ves la razón; ellos tienen un pensamiento demasiado práctico.

**HERON:** Pienso que deberíamos aprender de los romanos, entonces tendríamos más oportunidades de derrotarlos.

**ARQUIMEDES:** No estoy de acuerdo. Si tú tratas de vencer abandonando las ideas que hemos establecido e imitando a nuestros oponentes, estamos perdidos antes de que la batalla comience. Aún si podemos ganar la guerra de esta forma, no tendría ningún mérito; una victoria así es peor que una derrota.

**HERON:** No hablemos más sobre la guerra, retornemos a la matemática. ¿Dime, cómo construyes tus modelos matemáticos?

**ARQUIMEDES:** Es difícil explicarlo en términos generales. Quizá una analogía nos pueda ayudar. Un modelo matemático de una situación real es algo así como su sombra sobre la pantalla del pensamiento.

**HERON:** Me parece que tu filosofía es completamente opuesta a la de Platón. Él dice que los objetos reales son las sombras de las ideas, mientras que si interpreto correctamente el sentido de tus palabras, estás diciendo que las ideas son las sombras de la realidad.

**ARQUIMEDES:** Ambos puntos de vista no están tan alejados como parece. Platón estaba confundido por la correspondencia entre las ideas matemáticas y la realidad, y él pensaba que la tarea principal de la filosofía era explicar esta correspondencia. Hasta este punto, estoy completamente de acuerdo con él. No estoy de acuerdo con su explicación, pero al menos vió claramente el problema y trató de trabajar una de las posibles respuestas. Pero pienso que debemos abandonar la filosofía y retornar a los hechos de la vida.

He oído a alguien golpear la puerta. Voy a abrir.

HERON: Déjame hacerlo. Debe ser mi mensajero con la respuesta de Marcelo. Aquí está el mensaje.

ARQUIMEDES: ¿Cuál es la respuesta?

HERON: Léela tu mismo.

ARQUIMEDES: Déjame ver. "Marcelo envía sus saludos al Rey Herón y le anuncia que conquistará Siracusa antes de la luna nueva; el Rey Herón se dará cuenta que los romanos son fieles a su palabra".

HERON: ¿Qué piensas ahora sobre esto?.

ARQUIMEDES: Realmente su griego no es malo. En cuanto al contenido, era lo que esperaba.

HERON: Ciertamente, tu predicción fue tan correcta como si la hubieras encontrado por tu método.

ARQUIMEDES: Bueno, por lo menos sabemos ahora a qué atenernos.

HERON: Debo irme, necesito dormir un poco. Mañana debemos prepararnos para el nuevo ataque. Muchas gracias por esta conversación tan interesante.

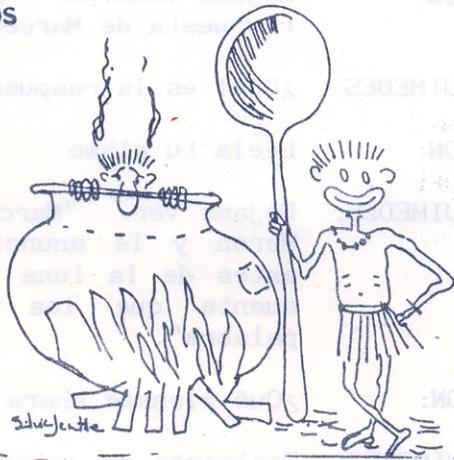
ARQUIMEDES: La he disfrutado sobremanera. No tengo, en estos días, muchas oportunidades de practicar sobre la matemática. Agradezco nuevamente la hermosa bandeja.

HERON: Me alegro de que te guste. Buenas noches, mi amigo. Pienso que tú también necesitas descanso.

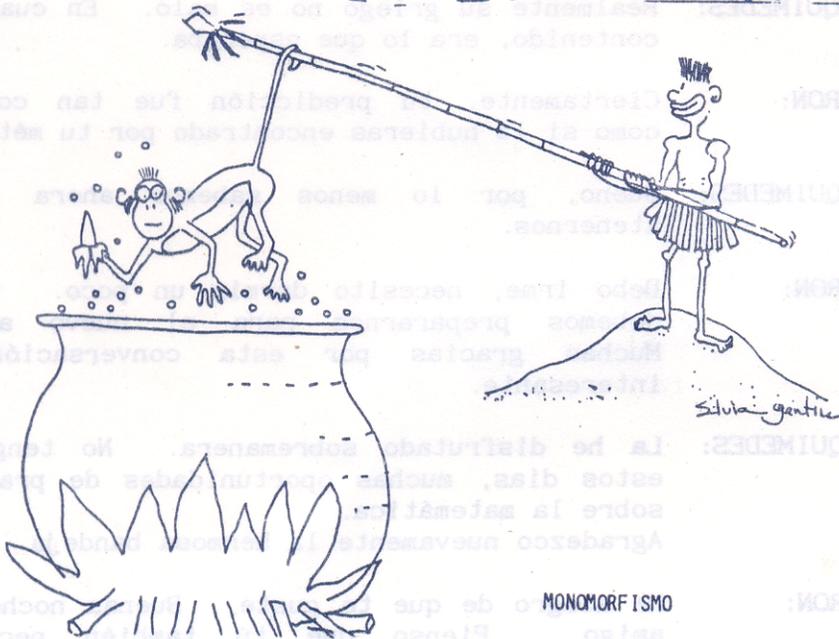
ARQUIMEDES: Buenas noches, mi rey. No iré a dormir todavía. Deseo terminar una carta para un amigo Dositeo de Pelusio sobre mis últimos resultados. Ahora que la flota romana se ha alejado, habrá barcos que pueden abandonar el puerto mañana, pero quizá pasado mañana los romanos establecerán nuevamente el bloqueo.

Deseo utilizar esta oportunidad; puede ser la última.

MORFISMOS



HOMOMORFISMO



MONOMORFISMO

¿POSIBLE?

En un cuadrado de 1 m de ancho por 1 m de alto, trace un cuadrado de 1 m de ancho por 1 m de alto cuya área sea la mitad del área del cuadrado original.

Disponer 24 personas en 6 filas con el mismo número de personas en cada una.