Análisis de un problema geométrico y estudio de las resoluciones de estudiantes del Profesorado de Matemática

María Angélica Zurbriggen, Liliana Nitti y Sara Scaglia
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

1. Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de una Cientibeca[1] que se desarrolla en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. El tema en estudio es: "Exploración de problemas de geometría métrica que apoyan el aprendizaje de contenidos correspondientes a los primeros cursos universitarios de Matemática (Matemática Básica, Álgebra Lineal I y Cálculo I) del Profesorado de Matemática".

Los objetivos perseguidos en el desarrollo de la cientibeca son los siguientes:

1) Explorar problemas que respondan a los siguientes núcleos:
   a) Vinculación entre las funciones y la geometría.
   b) Vinculación entre las desigualdades geométricas y aritméticas.
   c) Inducción y geometría.
   d) Expresiones algebraicas y geometría.
   e) Sucesiones y geometría.
2) Brindar una base de problemas vinculados a los núcleos mencionados.
3) Elaborar una justificación teórica acerca de las potencialidades del uso de la geometría métrica en la enseñanza de la matemática de los primeros cursos universitarios.
4) Implementar los problemas en asignaturas del primer ciclo del profesorado de matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias y analizar sus resultados.
5) Proponer una acción concreta de actualización con estos resultados destinada a profesores de Matemática del Polimodal y primeros años de la Universidad.

La primera etapa de la investigación consistió en seleccionar una lista de problemas que fueron considerados pertinentes e interesantes de acuerdo a los objetivos perseguidos.

Para cada uno de los problemas seleccionados se realizó una interpretación del enunciado (que requirió de la aclaración del uso que se realiza de los términos que aparecen en él) y se halló su resolución.

Inmediatamente, se continuó con un análisis más profundo de algunos de ellos utilizando diversas estrategias de resolución y abarcando distintos dominios de la matemática.

El tratamiento seguido para el estudio de estos últimos problemas ha sido el siguiente:

- Interpretación del enunciado.
- Resolución del problema.
- Exploración de resoluciones alternativas.
- Reformulación de las condiciones o datos iniciales y nueva resolución, potencialidades que presenta el problema o aplicaciones no previstas por el autor
- Generalización del problema y elaboración de una demostración rigurosa.

Uno de los problemas, luego de haber sido analizado y tratado, fue administrado a un grupo de alumnos del Profesorado de Matemática con el fin de obtener información sobre los marcos (Douady, 1986) y esquemas de prueba (Sowder y Harel, 1998) utilizados en su resolución.

En este trabajo presentamos algunos aspectos relevantes del proceso seguido para el análisis del problema y los resultados obtenidos por los alumnos durante su resolución.

2. Estudio de un problema

Enunciado original (Gay, 1998, p.10)

Un triángulo construido con piezas de madera es rígido pero un cuadrado no lo es. Éste se inclina y se deforma. Para prevenir su deformación podemos agregar un brazo diagonal. Para conservar polígonos rígidos tenemos que agregar un cierto número de brazos diagonales. ¿Cuántas diagonales posibles tiene un decágono? ¿Cuántas se necesitan para hacerlo rígido?

[1] Correspondiente al período 2005-2006

Interpretación del enunciado
Ante la lectura del mismo es necesario efectuar un análisis de algunas de las expresiones utilizadas. Respecto de éstas, se hacen las siguientes consideraciones:

- ¿A qué se refiere el autor específicamente al hablar de *piezas de madera*? Consideramos que el uso de esta expresión es impreciso, al menos en la lengua española, por lo que creemos pertinente, de aquí en adelante, utilizar el término "varillas" que simularán los lados de un modelo material móvil de un polígono.

- Notar que en el enunciado que propone el autor, cuando habla de que el cuadrado se deforma, está "pensando" en un modelo material móvil (con cuatro piezas articuladas iguales se puede construir un cuadrado, pero también un rombo). Desde este punto de vista consideramos al igual que Recio (1998) que "una estructura de puntos y barras es *rígida* cuando no admite deformaciones, esto es, cuando no es posible obtener, perturbando de modo continuo cada uno de los puntos de la estructura mientras se mantienen las relaciones establecidas entre los mismos, otras estructuras con los mismos puntos y las mismas especificaciones de barras entre ellos, pero que no sean superponibles, mediante una isometría, con la estructura inicial. La palabra "de-formación" hace referencia, precisamente, a que la estructura pueda devenir en otra con forma distinta; distinta, aquí, significa no isométrica con la estructura dada" (Recio, 1998, p.152).

- Con tres varillas (con el único requerimiento de que la longitud de cada una sea menor que la suma de las longitudes de las otras dos y mayor que su diferencia) se puede construir un triángulo. "Es evidente que una configuración de puntos y barras en forma de triángulo es rígida en el plano: si movemos cada uno de los puntos manteniendo las distancias entre ellos, lo que resulta, al final, es otro triángulo con la misma forma" (Recio, 1998, p. 152).

- Dado que el autor introduce la expresión 'polígonos' en el enunciado, asumimos que la ubicación de las varillas y los puntos son coplanares. Esta aclaración es necesaria dado que: "Si consideramos dos triángulos con un lado común, obtenemos una nueva configuración rígida en el plano, pero no en el espacio: basta girar uno de los triángulos a lo largo del eje formado por el lado común […]. Ese giro conserva las distancias entre los vértices del triángulo que giramos y, naturalmente, las distancias entre los puntos del triángulo que no gira siguen siendo las mismas" (Recio, 1998, p. 152). En esta última cita se asume que una estructura plana formada por dos triángulos con un lado común es rígida[2].

-

Con la finalidad de explorar las posibilidades de que los alumnos utilicen una demostración por inducción se decide modificar el enunciado original. Además, se decidió quitar la primera pregunta para acortar la resolución ya que se disponía de un tiempo acotado para su implementación.

Problema reformulado
Para transformar polígonos articulados en polígonos rígidos debemos agregar un cierto número de varillas como diagonales del polígono. ¿Cuántas varillas nuevas son necesarias en un decágono? ¿Y en un polígono de n lados?
Ayuda: Un triángulo construido con varillas de madera es rígido, no ocurre lo mismo con un cuadrilátero, pues con cuatro varillas articuladas se pueden obtener distintos cuadriláteros. Si agregamos una nueva varilla como diagonal del cuadrilátero, éste permanecerá rígido.

Observación 1

[2] Asumiremos que la estructura plana obtenida a partir de la unión finita de triángulos, tales que tomados de a dos tengan un lado congruente y estén unidos por dicho lado, es rígida.

En todo el desarrollo y análisis de la solución de este problema nos referimos sólo a la construcción de polígonos convexos.

Análisis del problema

Veamos que sucede en algunos casos particulares, según el número n de lados del polígono. De la observación de éstos, plantearemos una conjetura para resolver el caso general, para luego demostrarla. Consideramos los siguientes casos:

Para *n*=3

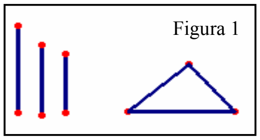


Figura 1

En primer lugar, debemos asegurarnos que las longitudes de las varillas dadas cumplen las condiciones enunciadas anteriormente respecto de sus longitudes. En tal caso la construcción obtenida es única (Figura 1).

Para *n*= 4

En primer lugar suponemos que las varillas dadas cumplen la siguiente condición respecto de los lados de un cuadrilátero: *la longitud de cada varilla es menor que la suma de las longitudes de las otras tres*.

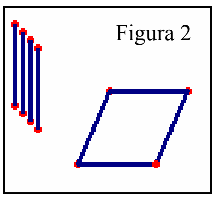


Figura 2

A continuación describimos algunos casos que se pueden presentar según el tamaño de las mismas:

1) Si tenemos cuatro varillas congruentes podemos construir rombos (Figura 2).

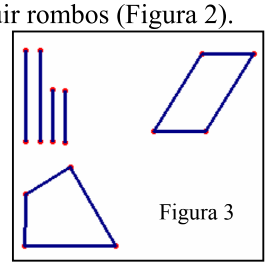


Figura 3

2) Si tenemos dos pares de varillas congruentes obtendremos distintos cuadriláteros (Figura 3). Si disponemos las varillas congruentes de modo que representen lados opuestos, obtenemos paralelogramos. En cambio, si las varillas congruentes representan lados consecutivos, obtenemos romboides.

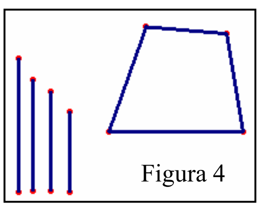


Figura 4

3) Si tenemos cuatro varillas de longitudes distintas dos a dos, podemos construir trapecios no isósceles y trapezoides (Figura 4).

Notar que las configuraciones obtenidas son flexibles ya que estamos utilizando polígonos articulados. "Una configuración plana en forma de cuadrado es flexible, pues éste puede convertirse en un rombo manteniendo las distancias relativas entre vértices consecutivos (aunque estén unidos por barras de algún material que no admita estiramientos ni encogimientos, siempre que las barras puedan girar libremente en los vértices" (Recio, 1998, p.153). Vemos así que no es suficiente tener las varillas para mantener el cuadrilátero rígido, éste se deforma.

Mediante una exploración directa, se observa que si agregamos una varilla como diagonal en los cuadriláteros, en éstos quedan determinados dos triángulos formados (cada uno) por dos varillas del cuadrilátero y la varilla diagonal (Figura 5). Sabemos que cada uno de estos triángulos es rígido y, por tanto, el cuadrilátero también lo será[3].

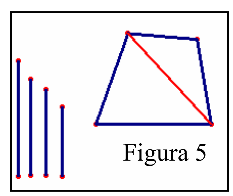


Figura 5

Para *n*=5

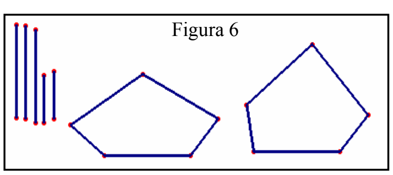
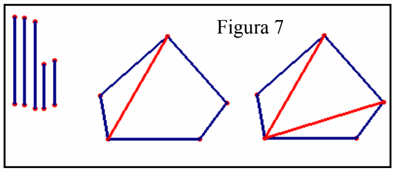


Figura 6

No es difícil comprobar que dadas cinco varillas se puede obtener (por medio del movimiento de las mismas) una variedad de polígonos diferentes de cinco lados, por lo cual los datos dados son insuficientes para que la estructura sea rígida (Figura 6). Notemos que si agregamos una varilla como diagonal, la estructura queda particionada en un triángulo y en un cuadrilátero.

[3] Ver nota de pie de página Nº 2.



(Figura 7) Por lo analizado hasta el momento tendremos que el triángulo se mantiene rígido, mientras que el resto del polígono (el cuadrilátero) se "deformará". Por lo tanto podemos decir que necesitamos agregar más condiciones que en el caso n=4 para obtener una estructura rígida.

Si agregamos otra varilla como diagonal, el pentágono quedará dividido en tres triángulos y el polígono permanecerá rígido.(Figura 7)

Por lo desarrollado hasta aquí intuimos que debemos agregar varillas como diagonales, de modo que el polígono se particione en triángulos.

En forma inductiva, generalizamos en la Tabla 1 la situación referida al número de varillas diagonales que son necesarias para particionar una estructura poligonal de n lados en triángulos, y el número de triángulos determinados.

Número de varillas (lados del polígono)	**Varillas diagonales necesarias**	**Triángulos que se determinan**
3	0	1
4	1	2
5	2	3
:	:	:
10	7	8
:	:	:
n	n-3	n-2

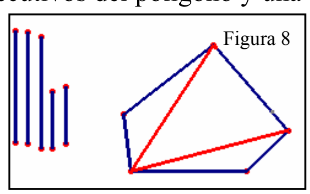
Tabla 1

Para probar lo planteado en la tabla 1, razonaremos sobre un contexto geométrico suponiendo que los vértices del polígono pertenecen a un mismo plano.

Observamos primeramente que desde cada vértice se puede determinar una diagonal con cada uno de los vértices no consecutivos.

Es claro entonces que para determinar el número de diagonales que pasan por uno de los vértices, debemos descontar del número total de vértices el vértice considerado y sus dos consecutivos, es decir, el número de diagonales que se determinan por cada vértice es n-3. Lo que nos lleva a analizar cuántos triángulos pueden ser determinados considerando las diagonales desde un vértice del polígono.

Observemos que dos de los triángulos estarán formados por dos lados consecutivos del polígono y una diagonal. Los restantes triángulos se determinan utilizando un lado del polígono y dos diagonales.



Sea el polígono $a_1a_2...a_n$ (Figura 8, donde k=5). Se tienen los triángulos $a_1a_2a_3$ y $a_1a_na_{n-1}$, cuyos lados están formados por dos lados del polígono y una diagonal (1). Los restantes triángulos son $a_1a_ka_{k+1}$ donde k varía de 3 a n-2, en total se tienen n-4 triángulos (2). Luego por (1) y (2) tenemos que en un polígono de n lados se determinan (n-4)+2 = n-2 triángulos.

Lo realizado hasta el momento nos lleva a la siguiente conjetura:

Dadas n varillas se necesitan agregar *n-3* varillas como diagonales desde un vértice para que el polígono se mantenga rígido.

Para probar dicha conjetura usaremos el principio de inducción matemática.

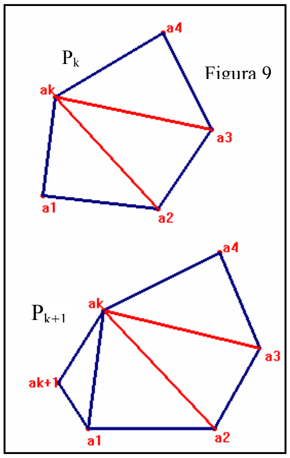
Caso inicial:

Para n=3, vale nuestra conjetura, pues sabemos que con tres varillas se determina un triángulo, y necesitamos agregar 3-3=0 diagonales para que el polígono se mantenga rígido.

Para n=4, por lo analizado anteriormente nuestro supuesto se verifica. Sabemos que necesitamos n-3 = 4-3 = 1 diagonal para que el cuadrilátero quede dividido en triángulos. En este caso el cuadrilátero se dividirá en: n-2 = 4-2 = 2 triángulos, y de esta manera obtenemos que el cuadrilátero no se deforma, se mantiene rígido.

Hipótesis inductiva (HI)

Suponemos que la conjetura se verifica para n=k, es decir, agregando *k-3* diagonales el polígono se mantendrá rígido.
Veamos que sucede para n=k+1.
Consideramos a P_k, un polígono de k lados cuyos vértices son $a_1,a_2,....a_k$. Sea P_{k+1} el polígono que se obtiene al agregar el triángulo $a_1 a_k a_{k+1}$ (P_3) a P_k, de modo que el polígono $a_1,a_2,....a_k$, a_{k+1} sea un polígono convexo (Figura 9, donde k=5).
Los lados $\overline{a_1 a_{k+1}}$, $\overline{a_k a_{k+1}}$ comparten un vértice (a_{k+1}). El segmento que determinan los vértices restantes (a_1 y a_k) son vértices no consecutivos de P_{k+1}, por lo tanto este segmento es diagonal del polígono obtenido. Esta diagonal, particiona al polígono P_{k+1} en dos polígonos: el polígono de k lados (P_k) que hemos considerado, y un triángulo.



Si agregamos k-3 varillas diagonales a P_k, sabemos por hipótesis inductiva que P_k se mantendrá rígido. Por otro lado, por el caso inicial sabemos que un triángulo es rígido. Por lo tanto P_{k+1} también será rígido ya que éste se determina por P_k y P_3.
Resumiendo, vemos que para determinar P_{k+1} fueron necesarias agregar (k+1)-3 diagonales, pues sabemos por hipótesis inductiva que se necesitan k-3 diagonales para que P_k sea rígido y en P_{k+1} se agregó una nueva diagonal al anterior; es decir se tiene k-3+1= (k+1)-3 diagonales.
Luego por inducción matemática, concluimos que dadas n varillas agregando n-3 más como diagonales del polígono, éste se mantendrá rígido.

3. Análisis de las resoluciones de estudiantes de Profesorado de Matemática

Aspectos teóricos
La resolución de problema es considerada en la actualidad una parte fundamental de la educación matemática. Entendemos al igual que Saiz (1996, p. 116-117) que “hacer matemática es buscar soluciones a problemas, pero también ponerse de acuerdo sobres esas soluciones y para eso es necesario probar, argumentar, discutir, verificar y hacer verificar, tratar de convencer, involucrarse en la búsqueda de la verdad de las afirmaciones que se realizan […]”. De esta forma, los alumnos pueden experimentar la potencia y utilidad de las matemáticas, ya que según plantea Guzmán (1992) se trata que el alumno manipule los objetos matemáticos, ejercite su capacidad mental, su creatividad, reflexione sobre su propio aprendizaje, adquiera confianza en sí mismo, se divierta y se prepare para otros problemas, para la vida diaria y las nuevas tecnologías.
Por otro lado, teniendo en cuenta, que la matemática está compuesta por entes de distinta naturaleza, como los elementos espaciales, algebraicos, aritméticos, lógicos e intuitivos, entre otros, es posible considerar diversos marcos, como marco espacial, marco algebraico, marco aritmético, marco geométrico.
En este sentido, tomaremos algunos aportes didácticos de las relaciones enseñanza – aprendizaje de una noción matemática de Regine Douady (1986), con referencia al *juego de marcos*.
“Un marco está formado por los objetos de un dominio de las matemáticas, las relaciones entre objetos, sus formulaciones eventualmente diversas y las imágenes mentales asociadas a estos objetos y sus relaciones […]. El cambio de marcos es un medio de obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser necesariamente todas equivalentes, permite un nuevo acceso a las diferencias encontradas, y la puesta en práctica de herramientas y técnicas que no se impusieron en la primera formulación. El objetivo es para el investigador forjar las convicciones que surgen sobre las conjeturas y formular los jalones que permitan organizar los planos de demostración. Un plan no siempre es bueno inicialmente, a menudo lleva a contraejemplos, se pone en evidencia obstrucciones, lo que ocasiona desplazar los jalones, rechazar la conjetura de partida. De cualquier modo las traducciones de un marco a otro conduce a resultados no conocidos, a técnicas nuevas, a la creación de objetos matemáticos nuevos, en suma, al enriquecimiento del marco origen y de los marcos auxiliares de trabajo” (Douady, 1986, p. 11). Cabe aclarar que dos marcos diferentes pueden tener los mismos

objetos matemáticos pero diferentes imágenes mentales asociados a ellos, como también la problemática que generan.
El cambio de marco se realiza cuando es necesario presentar diferentes formulaciones de un mismo problema, ante las dificultades que se presentan y la posibilidad de acceder a otras herramientas. Los cambios de marcos pueden ser espontáneos, es decir por la iniciativa de un alumno o provocados por otro alumno o docente para hacer avanzar en los conceptos, desbloquear una situación o hacer evolucionar una concepción. En este sentido, podemos ayudar al alumno a comprender un problema o concepto dentro de un marco u otro, lo que a su vez favorecerá a entenderla matemática como un todo integrado, no encontrándose contradicción entre los diferentes dominios de ella.
Otra cuestión a considerar son los tipos de justificaciones que los estudiantes presentan de los resultados alcanzados. Sowder y Harel (1998) consideran que probar o justificar un resultado involucra determinación (convencerse a sí mismo), y persuasión (convencer a otros). "Un esquema de prueba de un individuo consiste de aquello que constituye determinación y persuasión para esta persona" (p. 670). Presentan tres categorías:
1) *Esquemas de pruebas basadas en lo externo*.
2) *Esquemas de pruebas empíricas.*
3) *Esquemas de pruebas analíticas o matemáticas*.
1) Los esquemas de pruebas basadas en lo externo refiere a los argumentos utilizados por los alumnos que se apoyan en fuentes externas a él, las cuales pueden ser:
- apoyo en la autoridad, refiriéndose a libros de textos, declaraciones de docentes, o de algún conocimiento aprendido en la clase.
- rituales, entendiendo a éstos como aquellos procedimientos que adquirió el alumno para justificar o demostrar de determinada manera, de acuerdo a una situación y que es utilizada cada vez que se presente una situación similar. Por ejemplo, es usual que los alumnos cuando observan un problema que involucre los números naturales, automáticamente demuestren por inducción matemática, a pesar de que para ciertos problemas este método no sea el adecuado.
- manipulación de símbolos, refiriéndose al uso de símbolos independientemente del significado y de la relación con la situación presentada.
2) *Los esquemas de pruebas empíricas* son aquellos en donde los alumnos justifican sólo basándose en ejemplos o en pruebas perceptuales (esbozos o varios dibujos).
3) *Los esquemas de pruebas analíticas o matemáticas*, se refieren a pruebas formales, entre las que se distinguen:
- transformacionales: los estudiantes justifican aspectos generales de una situación, e involucran un razonamiento orientado a resolver la conjetura general.
- axiomáticas: los alumnos organizan el conocimiento, de manera que los resultados siguientes son consecuencias lógicas de los precedentes, involucrando ideas primitivas, axiomas, definiciones y teoremas.

Situación en la que se administró el problema

El problema se administró a un grupo de 15 alumnos que cursaban la asignatura Cálculo II (correspondiente al primer cuatrimestre del segundo año de la carrera). Se solicitó previamente permiso a las docentes de la cátedra para utilizar una de sus clases para trabajar con el grupo. La edad aproximada de los estudiantes se encuentra entre los 19 y 21 años. Las asignaturas cursadas por todo el grupo son: Matemática Básica, Álgebra Lineal I y Cálculo I. La persona que administró el problema no es docente del grupo, previamente a la presentación del mismo les explicó a los alumnos que la actividad formaba parte de un proyecto de investigación y que los resultados no influirían en la evaluación de la asignatura.
A los alumnos se les permitió trabajar en vinas o de forma individual y se les proveyó de material (varillas de madera balsa y cinta adhesiva de papel). De los 15 alumnos, 5 trabajaron individualmente y el resto con un compañero, por lo cual al finalizar la clase se recogieron 10 trabajos.

Estudio de respuestas

El estudio de las respuestas se centró en la descripción de las estrategias utilizadas en cada trabajo, analizando los marcos (geométrico o aritmético) y los esquemas de prueba de cada uno.

Cabe aclarar que como el problema es presentado dentro del marco geométrico, es de esperar que los alumnos trabajen dentro de éste. Nos interesa observar si recurren al uso de otros marcos, si existe confrontación entre ellos, si emplean el mismo marco para obtener la conjetura que para demostrarla.
En cuanto a lo que refiere a los esquemas de prueba, nos interesa analizar los diferentes argumentos que utilizan para justificar una conjetura y observar los esquemas más frecuentes que presentan los alumnos.

Primera pregunta: Varillas necesarias para que el decágono se mantenga rígido
En siete de los diez trabajos los alumnos respondieron correctamente, diciendo que se necesitan 7 varillas. En los trabajos 2 y 3 la respuesta es errónea y está basada en un análisis incorrecto, como se pondrá de manifiesto más adelante. En el trabajo 4 la respuesta es errónea (6 varillas) aunque el razonamiento y la respuesta para el caso de n lados son correctos.

Segunda pregunta: Varillas necesarias para que un polígono de n lados se mantenga rígido
Notamos que en general, no se presentaron inconvenientes para hallar la expresión general. El mayor problema que manifestaron fue demostrar la expresión obtenida, dar argumentos convincentes de que la expresión hallada es verdadera.
Ocho trabajos presentan la respuesta correcta (n-3 varillas). En dos trabajos (2 y 3) los alumnos razonan incorrectamente, analizando diferentes casos que se basan sólo en la observación de polígonos regulares. Además, la expresión que obtienen no hace que el polígono se mantenga rígido, situación que no es evidenciada por ellos.
Con respecto a los marcos que se ponen en juego en las respuestas, en la mayoría de los trabajos (6 de 10) se obtiene la conjetura y se justifica trabajando exclusivamente en el marco geométrico. Cuatro trabajos utilizan también el marco aritmético, en algunos casos para obtener la conjetura (trabajos 2, 3 y 8) y en el último caso para justificarla (trabajo 7).

Cómo se obtiene la conjetura
La mayoría lo hace observando distintos casos hasta obtener una expresión general. Un solo alumno (trabajo 1) no muestra como obtiene la expresión, no analiza casos particulares (como triángulos, cuadriláteros, pentágonos), ni grafica ninguna situación, sólo se limita a contestar las preguntas formuladas.
En el 80% de los trabajos se observa que los estudiantes entienden que para lograr que un polígono sea rígido, éste debe dividirse en triángulos, ya que el triángulo es el único polígono que queda determinado conociendo sus lados. En consecuencia, el 60% de éstos razonan hallando la cantidad de diagonales que se deben agregar para que el polígono se divida en triángulos. Esto puede evidenciarse en comentarios como el siguiente:
"Sabemos que para un cuadrilátero se necesita una varilla, para que este quede rígido, formando dos triángulos.
Pudimos ver que para un pentágono se necesitan 2 varillas quedando formados por ellos 3 triángulos. […]
Los polígonos van a quedar rígidos si utilizamos la fórmula (n-3), esto se da ya que si tomamos un vértice cualquiera del polígono vamos a tener a ambos lados de él, vértices consecutivos a los cuáles no vamos a poder trazar diagonales. Mientras que si podremos trazar diagonales a los vértices restantes, siendo n-3. Quedándonos formado siempre un triángulo más que las varillas utilizadas". (Trabajo 9)

Cómo se demuestra de la conjetura
En cuanto a la demostración de la conjetura sólo dos alumnos (20%) alcanzan un esquema de prueba analítico (o matemático), uno de ellos transformacional (trabajo 9) y el otro axiomático (trabajo 8). Si bien se evidencia que en la mayoría de los trabajos los alumnos comprenden el problema y alcanzan una expresión general correcta, la fundamentación dada es insuficiente. En el 60% de los trabajos se observa que el esquema de prueba que presentan es el empírico, es decir, aquel que se basa sólo en ejemplos y dibujos. Además, hallamos entre los trabajos dos cuyo esquema de prueba está basado en lo externo (20%), dentro de estos uno de ellos emplea un ritual (trabajo 3) y el otro manipula símbolos

(trabajo 7). Cabe aclarar que no fue posible clasificar el esquema de prueba empleado en el trabajo 1, pues no hay evidencia suficiente para determinarlo.
Para ilustrar los razonamientos seguidos por los estudiantes, presentamos a continuación el análisis de algunos ejemplos.

Trabajo 2

En este trabajo, los alumnos razonan incorrectamente para obtener la expresión, basándose sólo en el dibujo y la observación de polígonos regulares. A continuación describimos parte de esta respuesta:

"n>3, n: lados
4---1 diagonal
5---2 diagonales
6--- 3 ´´
7---4 ´´
8---4 ´´
9---5 ´´
10--5 ´´
11--6 ´´
12—6 ´´
13—7 ´´
14—7 ´´
15—8 ´´

Mientras 3<n<8, voy a saber que mi cantidad de diagonales necesarias es n-3.
Cuando sean el número de lados par y n≥8, se va a obtener haciendo n/2.
Cuando sean el número de lados impar con n≥9, se resuelve haciendo (n+1)/2."

Para hallar la solución se ubican dentro del marco aritmético y expresan algunas conclusiones en el margo geométrico. El error se produce porque analizan solamente polígonos regulares. En los dibujos presentados, se trazan las diagonales que se cortan en el centro del polígono determinando triángulos que poseen como vértice dicho centro. Los triángulos buscados deben tener como vértices únicamente los del polígono.

Trabajo 3

En un primer intento, se realiza un correcto análisis de los casos (marco geométrico), lo que permite hallar la relación correcta. Para demostrarla, se intenta hacerlo por inducción (marco aritmético), como sigue:

"1)n=4 n €N
V=4-3=1
2) Supongo que se cumple para n=k
V=k-3
Si le agrego un lado al polígono de k lados:
V=(k+1)-3
V=k-3+1
Vale para todo n €N ∧ n≥4."

La demostración es incorrecta, ya que no demuestra el paso inductivo, sólo está afirmando lo que se desea probar. Podemos decir que el alumno presenta un esquema de prueba basado en lo externo ritual, pues pretende seguir con el procedimiento de inducción siguiendo el formato correspondiente, pero no alcanza a demostrar el resultado. El estudiante parece tomar conciencia, y deshecha este razonamiento.
En un segundo intento, se utilizan los dos marcos mencionados con la particularidad de que los resultados obtenidos a partir del uso de cada uno se contradicen.
El alumno muestra varios casos, acompañados de gráficos y ejemplos, lo que lo conduce a plantear algunas fórmulas, pero trabajando ahora en dos marcos: aritmético y geométrico. Cabe aclarar que

aquí no realiza una demostración de lo planteado sólo lo asegura apoyándose en ejemplos y dibujos. Por tal razón, podemos decir que el esquema de prueba es empírico.
Las fórmulas halladas son las siguientes:
Si n es par entonces se necesitan n/2 diagonales. (1)
Si n es impar entonces se necesitan (n+1)/2 diagonales.(2)
De estos resultados se observan contradicciones, pues las fórmulas no coinciden con todos los ejemplos y dibujos mostrados. Por ejemplo, para un polígono de cuatro lados se expresa que se necesita una diagonal para mantener al polígono rígido, realiza el dibujo correspondiente que satisface lo mencionado pero utilizando la fórmula (1) tenemos que necesitamos 2 diagonales, lo cuál es contradictorio.
En otros casos que presenta, no hay coherencia entre la fórmula y el gráfico, pues se puede observar el dibujo de un pentágono y expresa que son necesarias dos diagonales, pero luego cuando analiza los casos determina que se necesitan 3 diagonales, lo cuál acuerda con la fórmula pero no con el dibujo.
En este trabajo existe una fuerte contradicción entre los resultados obtenidos bajo los distintos marcos. A diferencia de lo que se esperaba la confrontación entre marcos no mejora la comprensión e interpretación del problema. Conjeturamos que la alumna realiza este segundo análisis con escaso margen de tiempo, razón por la que posiblemente no haya notado las contradicciones mencionadas.

Trabajo 5
Como se puede observar, el alumno observa diferentes ejemplos y con ello argumenta que se cumplirá para el caso general. El esquema de prueba es empírico.
"El primer polígono, que es el triángulo, no necesita ninguna varilla.
El cuadrilátero necesita una varilla, es decir una diagonal. Y la cantidad de diagonales que tiene por vértice un cuadrilátero es igual a 4-3=1, donde 4 es el número de lados.
Además esa diagonal me determina dos triángulos, y ya sabemos que el triángulo es un polígono rígido.
A medida que se va agregando un lado aparece una nueva diagonal por vértice, que es un lado del polígono que tenía un lado menos esa diagonal me determina un triángulo nuevo. Y obtengo tres triángulos de las dos diagonales del polígono de 5 lados.
Así, un polígono de n lados necesitará (n-3) varillas como diagonales para ser un polígono rígido."

Las respuestas a la pregunta respecto del número de varillas que se necesitan para un polígono de n lados se resumen en la tabla 2, que incluye información respecto de los siguientes aspectos: el marco utilizado para obtener la expresión general, si la expresión es o no correcta, el marco utilizado en la justificación y el esquema de prueba correspondiente.

Trab	Marco usado para obtener la expresión	Expresión correcta ó incorrecta	Marco usado para justificar	Esquema de prueba
1	Información insuficiente	Correcta	Geométrico	Información insuficiente
2	Aritmético	Incorrecta	Geométrico	Empírico
3	Geométrico	Correcta	Aritmético	Externo- Ritual
	Geométrico - Aritmético	Incorrecta	Geométrico - Aritmético	Empírico
4	Geométrico	Correcta	Geométrico	Empírico
5	Geométrico	Correcta	Geométrico	Empírico
6	Geométrico	Correcta	Geométrico	Empírico
7	Geométrico	Correcta	Geométrico - Aritmético	Externo – Simbólico
8	Aritmético	Correcta	Geométrico	Analítico – Axiomático
9	Geométrico	Correcta	Geométrico	Analítico – Transformacional
10	Geométrico	Correcta	Geométrico	Empírico.

Tabla 2

4. Reflexiones finales

Como se puso de manifiesto en el estudio del problema, bajo un enunciado de apariencia sencilla pueden plantearse situaciones matemáticas muy interesantes. Respecto del tema de la rigidez, Recio (1998) nos advierte del escaso aprovechamiento que se realiza del mismo en la docencia universitaria, a pesar de los avances matemáticos contemporáneos, de las aplicaciones tecnológicas y de las posibilidades manipulativas que ofrece. El problema, inicialmente planteado en un contexto de manipulación concreta, resultó de utilidad pues nos permitió observar hasta qué punto los alumnos podían, a partir del contexto concreto, plantear una conjetura y validarla en un contexto geométrico abstracto.

Entre los resultados obtenidos en la implementación del problema, se observa que gran parte de los estudiantes presentan dificultades para demostrar las conjeturas planteadas:

- La mayoría justifica basándose sólo en dibujos y ejemplos, como si estos fueran argumentos suficientes para demostrar la expresión obtenida. Se trata de esquemaa de prueba empíricos.
- Fueron muy pocos los trabajos que presentaron como esquema de prueba el analítico. Los alumnos que participaron son estudiantes del segundo año del profesorado de Matemática y por tal razón se espera que desarrollen en su formación herramientas para dar pruebas convincentes de sus conjeturas y razonamientos.

Finalmente incluimos algunas reflexiones que trascienden el marco de esta experiencia pero que consideramos de interés explorar en etapas futuras, en el marco de la Resolución de Problemas y de la formación del Profesorado de Matemática:

- La profundización en el estudio de un problema matemático abre perspectivas insospechadas traducidas en un aumento de conocimiento. Esta posibilidad resulta de gran interés para la formación docente.
- La exploración de un problema desde distintas áreas de la matemática, genera nuevas estrategias y aplicaciones. Desde el punto de vista didáctico, ello contribuye a mejorar la predisposición de los alumnos hacia el estudio de la matemática. Al presentarse la posibilidad de encontrar diferentes resoluciones se podrán superar las dificultades que surjan durante el abordaje del problema en un dominio determinado.
- Otro aspecto que enriquece el estudio de problemas es la consideración de alternativas para las condiciones iniciales. Es otra cuestión desde el punto de vista didáctico que nutre la formación docente.

Referencias bibliográficas

Douady, R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil –objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 5-31.

Gay, D. (1998), *Geometry by Discovery*. New York: John Wiley & Sons.

Guzmán, M. (1992), *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Buenos Aires: OMA

Recio, T. (1998), *Cálculo simbólico y geométrico* .Madrid: Editorial Síntesis.

Saiz, I. (1996), Resolución de problemas. En *Fuentes para la transformación curricular. Matemática.* Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

Sowder, L. y Harel. G. (1998), Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, 91, 8, 670-675.