Título: La Demostración en Geometría en la Formación de Profesores

Virginia Montoro – Liliana Siñeriz – Cristina Ferraris

Dpto Matemática - Centro Regional Bariloche. Univ. Nac. del Comahue (Argentina)

Correo electrónico: lsineriz@crub.uncoma.edu.ar ; vmontoro@crub.uncoma.edu.ar; cferrari@crub.uncoma.edu.ar.

Nivel educativo: Educación superior

INTRODUCCIÓN

La experiencia adquirida en el campo de la formación de profesores y los resultados de anteriores investigaciones, nos llevaron a considerar que una manera eficiente de contribuir al mejoramiento de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática es atendiendo a la formación de los futuros docentes; bajo la hipótesis de que el propio aprendizaje y el cuerpo teórico del profesor se verán reflejados en el modo de implementar sus clases.

En el proceso de aprendizaje de la matemática la argumentación utilizada para demostrar una proposición matemática, puede aparecer bajo distintos aspectos, con mayor o menor grado de explicitación y con distintos niveles de rigor; muchas veces como un medio de autovalidar los conocimientos o convencer sobre su validez. Sin embargo la demostración es un procedimiento netamente matemático ligado a establecer propiedades de los conceptos, equivalencia de definiciones o confirmación de conjeturas en un el contexto de un sistema axiomático.

Aun presente desde los primeros pasos en la formación matemática, la tarea de demostrar es cognitivamente compleja, no siempre tan diáfana como la redacción final de una demostración parece indicar. La denominada “demostración final” de un teorema es la culminación de un proceso, la presentación limpia y ordenada de una larga investigación nunca exenta de intuición, pruebas, errores, refinamientos, etc. (Polya,1954, Lakatos, 1976, Schoendfeld,1992).

Estas consideraciones nos llevaron a investigar el trabajo de los estudiantes de profesorado en cuanto a la construcción de su aprendizaje, centrándonos en la demostración en geometría. Consideramos que la Geometría Euclídea es un dominio propicio para el trabajo con demostraciones ya que da lugar al desarrollo de la creatividad, a la organización de estrategias de resolución de problemas, propiciando el tratamiento de contenidos procedimentales propios del quehacer matemático.

Presentaremos aquí una síntesis de los principales resultados del proyecto de investigación denominado *La demostración en Geometría en la formación de profesores*[1], ejecutado en el Departamento de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue; durante los años 2003 a 2005.

El objetivo general de dicho proyecto fue indagar el proceso de aprendizaje de la demostración de estudiantes de Profesorado de Matemática en el contexto de problemas de Geometría Euclídea del Plano.

METODOLOGÍA

Hemos trabajado con 12 estudiantes de Profesorado de Matemática durante la cursada de la asignatura *Geometría Euclídea del Plano*, asignatura del segundo año de la carrera y que se dicta con un fuerte acento en el trabajo matemático, particularmente en las demostraciones. Los estudiantes previamente habían tenido un curso de Álgebra donde trabajaron con sistemas axiomáticos, tipos de demostración y tuvieron la oportunidad de realizar y estudiar numerosas demostraciones y justificaciones.

La investigación se organizó según los siguientes núcleos:

- diseño de un Modelo Teórico
- elaboración de los instrumentos de indagación
- recolección de datos según los instrumentos anteriormente diseñados
- análisis y discusión de los resultados

- En cuanto al diseño de un Modelo Teórico

Con el propósito de explicar y analizar el proceso de aprender a demostrar en Geometría nos encontramos ante la necesidad de acotar los aspectos implicados, intentando priorizar aquellos que a nuestro criterio resultaran más relevantes.

La elección se basó en la lectura de la bibliografía, en nuestra propia experiencia como matemáticos y educadores matemáticos y en una primera lectura de las producciones de los estudiantes. Las perspectivas elegidas no pretenden barrer la gama de posibilidades a

[1] Proyecto de Investigación 04B105, aprobado y subsidiado por la secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue: Dirigido por C. Ferraris y Co-dirigido por V. Montoro; otros integrantes del mismo son: R. Santinelli, L. Siñeriz , M. Ferrero y M. Juan

considerar sobre el aprendizaje de la demostración desde un planteamiento didáctico, sino que es la opción que decidimos trabajar.

Mediante estos componentes, que describiremos al presentar los resultados teóricos del proyecto, pretendemos explicar dicho proceso, si bien no excluimos que haya otras maneras de analizarlo, que se corresponden con otros modelos diferentes.

- En cuanto a la elaboración de los instrumentos de indagación

A modo de instrumentos de indagación se elaboraron una serie de tareas relacionadas con la demostración en Geometría Euclídea para ser resultas por escrito y en forma individual. La elección y presentación de las actividades previstas en dos tests se basó en el contenido matemático involucrado, los métodos de demostración utilizados en matemática para validar o refutar una aserción, la posibilidad de identificar demostraciones pragmáticas e intelectuales, el potencial heurístico de los problemas y ciertas variables de enunciado

Luego de un primer análisis del test inicial se diseñó el guión de una entrevista semiestructurada, contemplando preguntas tendientes a completar la información del mismo y tareas nuevas que atiendieran a otros aspectos relevantes para esta indagación.

Se anexan las tareas propuestas en ambos test.

- En cuanto a la recolección de datos

Los tests escritos se administraron uno al comienzo y otro al final del dictado de la asignatura soporte y se implementó una entrevista semiestructurada a cada estudiante en forma individual. Ésta fue realizada en cada caso por dos investigadoras y se grabó en su totalidad.

- Respecto al análisis de los datos y discusión de los resultados

En una primera etapa, y atendiendo a uno de los componentes del Modelo Teórico, se elaboró una clasificación de “tipos de prueba” que producen los estudiantes, de la cual damos cuenta posteriormente en la descripción de los resultados teóricos. Dicha tipología fue realizada teniendo en cuenta el papel que en las pruebas se asigna al ejemplo, la utilización de procedimientos propios de la matemática, y el mayor o menor aporte de argumentos deductivos y de lenguaje simbólico.

Esta tipología de pruebas fue aplicada como instrumento para interpretar las producciones de los estudiantes de dos maneras complementarias. Sobre la base de los indicadores previstos en ella, por un lado se focalizó en la tarea y se categorizó las pruebas generadas por los participantes para cada tarea y por otro se analizó globalmente las respuestas a las actividades de cada uno de los test de un estudiante en particular .

Es decir por una parte se efectuó una categorización de las producciones de los alumnos en cada uno de los problemas de demostrar y por otra la aplicación de este instrumento en el análisis global de las producciones individuales permitió estudiar la evolución del aprendizaje de la demostración de cada alumno.

La categorización de las pruebas fue realizada en forma independiente por las investigadoras procediéndose después a realizar controles cruzados; y en caso de presentarse dudas sobre las producciones, se recurrió a las entrevistas para dilucidar sobre estas cuestiones.

Desde la perspectiva centrada en la tarea y con el propósito de evidenciar asociaciones entre los tipos de prueba asignados a las producciones ofrecidas por los estudiantes, así como de establecer similitudes y diferencias entre estos en los distintos estudiantes, se realizó un Análisis Multivariado de la tabla que cruza los estudiantes con los tipos de pruebas producidos.

Respecto de la exploración de las concepciones de los estudiantes sobre la Demostración**,** se realizó una clasificación de los participantes, mediante un análisis factorial de correspondencias, según las palabras que asociaran a los distintos términos *geometría, demostración y justificación (*Tarea 1 del Test inicial) y posteriormente, en busca de evidenciar asociaciones entre estos grupos de estudiantes y las pruebas que producen, se cruzó (AFCM) el grupo al que pertenecía cada estudiante según esta clasificación con los tipos de pruebas que producía cada participante

Además mediante el análisis cualitativo de las entrevistas semisetructuradas se establecieron categorías de los argumentos que dan estos estudiantes respecto del significado de demostrar en distintas ramas de la matemática y en otras ciencias.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Presentaremos los resultados teóricos derivados de este proyecto, y en este sentido, aludiremos al Modelo Teórico que hemos diseñado para analizar el proceso de aprendizaje de la demostración en geometría, y a la clasificación de los tipos de prueba, que hemos realizado, atendiendo a determinadas características que adquieren en su comunicación. Así también presentaremos algunos resultados que surgen del análisis de las actuaciones de los estudiantes

1. En cuanto a los Resultados Teóricos

1.1. Modelo teórico

La complejidad del objeto de estudio hizo evidente la necesidad de contar con un modelo teórico que diera cuenta de las múltiples dimensiones del problema. El Modelo Teórico se centró en siete componentes: *concepciones, contenido matemático, métodos de demostración, lenguaje, niveles de razonamiento, tipos de prueba y heurísticas*.

* Las *concepciones* de los estudiantes sobre la demostración, permiten examinar las bases cognitivas del proceso de construcción del aprendizaje del dominio que nos ocupa.

* El contenido *matemático* alude al conocimiento conceptual utilizado, mientras que *métodos de demostración* apunta a examinar la aplicación que los alumnos hacen de la lógica formal implicada en los métodos que en matemática se usan para validar o refutar un aserción.

* Los *lenguajes* utilizados en la argumentación que consideramos son el coloquial y simbólico, y su grado de precisión y/o formalismo.

* Dado que estamos en el contexto de la geometría euclídea, hemos tenido en cuenta los *niveles de razonamiento* de Van Hiele.

* Los *tipos de prueba* aluden a los distintos modos utilizados en la argumentación por los estudiantes para validar o refutar una aserción.

* Las *heurísticas* engloban los modos y medios que se utilizan en el proceso de demostración que son independientes del contenido, y que no suponen garantía de que se obtenga la solución.

Estos siete componentes interrelacionados pretenden explicar el proceso de aprendizaje de la demostración en Geometría. (Siñeriz y Ferraris. 2005)

1.2. Tipología de pruebas

En nuestro trabajo optamos por utilizar el término "prueba" a fin de cubrir toda la gama de argumentaciones utilizadas para justificar una aserción, desde los estadios más intuitivos a los estrictamente formales.

Los tipos de prueba que hemos establecido pretendemos catalogar el producto final de un proceso de producción de justificaciones, sin aspirar a describir el proceso mismo.

Clasificamos los tipos de prueba empírica en *ingenua o cándida* (se extrae de la observación de un pequeño número de casos la certeza de verdad de una aserción), *decisiva o crucial* (consiste en una verificación experimental de la conjetura en un caso peculiar), y *genérica o representativa* (incluye referencias sensoriales o informales a elementos abstractos o propiedades de la clase representada por el ejemplo).

Diferenciamos las pruebas intelectuales de acuerdo al mayor o menor aporte de argumentos deductivos, de lenguaje simbólico, de utilización de procedimientos propios de la matemática: la utilización de métodos, manejo de conjeturas, posibilidad o no de generalización, etc., con distintos grados de formalización.

En las pruebas intelectuales distinguimos la *experiencia mental* (de carácter deductivo con argumentos informales que se caracterizan por la tendencia al uso casi exclusivo del lenguaje coloquial) y la *deducción formal* (se basa en operaciones mentales, se hacen inferencias en base al conocimiento de propiedades y definiciones, se realizan operaciones sintácticas con los enunciados que permiten trascender al ejemplo). (Siñeriz y Ferraris. 2005).

2. En cuanto al análisis de las producciones de los estudiantes

2.1. Análisis de las producciones de los estudiantes respecto del tipo de prueba

Un grupo grande de estos estudiantes ofrecen pruebas empíricas al comenzar el estudio de la Geometría, incluso muchas pruebas ingenuas, a pesar de haber cursado ya materias donde se ha visto a la demostración como un contenido específico. Esto estaría relacionado con lo encontrado en el análisis de la Tarea 1 (Montoro y Juan. 2005) en cuanto a que, a estos estudiantes el término Geometría pareciera remitirlos a una Geometría escolar, no formal, centrada en los objetos geométricos y físicos, más que en el método matemático y con una pobre relación con las demostraciones. Es decir en una etapa inicial de los estudios de Geometría las justificaciones empíricas parecen satisfacerlos.

Entre los alumnos que dan pruebas intelectuales, vemos mayormente un cambio en uso del contraejemplo, es decir que cuando tienen que "mostrar" un ejemplo que no cumple la proposición, tienden a satisfacerse con pruebas de un estatus menor que el formal, sin embargo los alumnos que tienden a dar pruebas empíricas repiten este tipo de prueba con el contraejemplo. (Ferraris y Siñeriz. 2005; Montoro. 2005)

Hemos encontrado como punto destacable, que el tramo de transición entre las pruebas empíricas hacia las intelectuales, hay un campo que si bien tiene características de experiencia mental podemos considerarlas como un estadio inicial, ya que poseen muchas inconsistencias, redundancias y baches en el proceso deductivo. (Montoro. 2005).

2.2. Análisis del proceso de aprendizaje de la demostración

Con la información que se deriva de ambos test y de algunos aportes de la entrevista complementaria, en los casos analizados se advierte que con el cursado de la asignatura se da cierto progreso en los modos de validación utilizados, que se plasma ya sea en el paso a un nivel más sofisticado de prueba o en la evolución en los aspectos característicos de un determinado tipo de prueba.

Esta evolución se centró en estos alumnos en aspectos diversos, en algunos de ellos se dio en cuanto a lo organizativo, en otros en los aspectos lingüísticos y en cuanto a incluir en la argumentación referencias informales a elementos y propiedades de la clase representada por cada ejemplo, y en algún caso se pasa de la comprobación en un representante de clase a la argumentación de carácter deductivo aunque informal. (Ferraris y Siñeriz. 2005)

2.3. Exploración de las concepciones de los estudiantes sobre la Demostración

Se reseñan resultados respecto a los siguientes aspectos:

a) demostrar como proceso o como objeto y significados de justificar y demostrar.

b) significado *de demostrar en distintas ramas de la matemática y en otras disciplinas*

a) Demostrar como *proceso o como objeto y* significados de *justificar y demostrar*.

Observamos que cada estudiante asocia a *demostración*, en general, palabras de la misma categoría, y que no ocurre lo mismo para *justificación*. Lo cual nos hace pensar que, por una parte estos dos términos no remiten a los estudiantes al mismo concepto y por otra que la representación del concepto de *demostración*, se presenta con mayor consistencia que el de *justificación*. Esto podría deberse al hecho de que la *demostración* se presenta como un contenido específico en un contexto matemático y no así la justificación, que representa un concepto más informal.

Encontramos también indicios sobre una primera diferenciación entre las concepciones posibles para *demostración*, estos estarían relacionados con el concebirla como un *objeto*, (fijo, determinado, acabado, "eso que está en el libro") o como un *procedimiento*, (algo que uno puede realizar, que se puede mejorar, puede crearse o re-crearse). (Montoro y Juan 2005)

b) significado *de demostrar en distintas ramas de la matemática y en otras disciplinas*

Del análisis cualitativo de las entrevistas surge una primera caracterización de los argumento que dan estos estudiantes respecto del significado de demostrar en distintas ramas de la matemática y en otras ciencias.

* Los argumentos para justificar que *Demostrar significa lo mismo en cualquier rama de la matemática* son de cuatro tipo (en orden de popularidad en estos estudiantes): *Secuencia lógica:* Básicamente se podría sintetizar en: en matemática se parte de algo, se sigue una secuencia lógica y se llega. *Decir porque:* Demostrar en matemática es decir porque, justificar, llegar a algo. *Centrado en los axiomas:* Lo central es la existencia en matemáticas de axiomas. *Generalidad:* En matemática se demuestra *para todos*

* Los argumentos para justificar que *Demostrar NO significa lo mismo en cualquier rama de la matemática* son de tres tipos (en orden de popularidad en estos estudiantes): *Simbolismo, formalidad, estricto vs aproximado, con números, baches*: En algunas ramas de la matemática (principalmente en Álgebra) las demostraciones son formales, en otras (Cálculo) son aproximaciones, con números. *Conceptos – dibujo.* En geometría es distinto *se demuestra con*

dibujos. Para todos – ejemplos. La diferencia viene dada por si la demostración es general o para un ejemplo

* Los argumentos para justificar que *Demostrar No significa lo mismo en otras disciplinas que en matemática* son de cuatro tipos (en orden de popularidad en estos estudiantes). *Empírico – No formal:* En otras disciplinas demostrar es algo empírico, puede ser un experimento, se basa en datos. *Mostrar algo:* En otras disciplinas demostrar es poner en evidencia, mostrar. *Aproximado, para algunos.* En otras disciplinas demostrar es algo aproximado, se muestra para algunos ejemplos. *Por el contenido.*

* Los argumentos para justificar que *Demostrar significa lo mismo en otras disciplinas que en matemática* son de dos tipos (en orden de popularidad en estos estudiantes): *Partir de algo, justificar y llegar***.** En otras disciplinas demostrar, al igual que en matemática, partir de algo, justificar y llegar a algo. *Mostrar - dar un porque.* En otras disciplinas demostrar es también mostrar, justificar dar un porque.

CONCLUSIONES

Desde el Modelo teórico planteado establecimos componentes relevantes del proceso de aprendizaje de la demostración en Geometría, aspirando a contribuir al estudio de este proceso complejo. Hemos profundizado en la tipología de pruebas que producen los estudiantes y delimitado algunos aspectos de las concepciones de los estudiantes de Profesorado respecto de la demostración.

La clasificación de tipos de prueba realizada se ha mostrado como un instrumento eficaz para indagar el proceso de aprendizaje de la demostración en Geometría, ya que la aplicación de este instrumento en el análisis de las producciones de los estudiantes en los dos tests administrados, nos dió información acerca de la evolución del aprendizaje de la demostración en cada caso.

Estos resultados nos han abierto líneas para seguir trabajando, pretendemos profundizar en cada una de las componentes del Modelo Teórico con el fin de establecer pautas para su caracterización. Estas pautas nos permitirán detectar cómo y cuando aparecen dichas categorías en las producciones de los estudiantes y a partir del cruzamiento de la información obtenida en el análisis de las distintas categorías pretendemos identificar sus interrelaciones.

Se aspira desde lo teórico a brindar un marco que permita la descripción y análisis del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría, y desde los resultados del análisis de datos, obtener un perfil de cada alumno en su proceso de aprender a demostrar.

Estas líneas pendientes se han plasmado en un nuevo proyecto de investigación como continuación del descripto en este trabajo, denominado *Aprendizaje de la Demostración en Geometría*[2], que en líneas generales será organizado en dos etapas.

En la primera etapa se profundizará el estudio de las categorías de análisis previstas en el Modelo Teórico, particularmente las no examinadas en detalle en el proyecto anterior, indagando acerca de sus interrelaciones. Se aspira a delinear los componentes definitivos del Modelo Teórico y el efecto de cada uno de ellos sobre los demás.

En la segunda etapa se implementará un curso diseñado en base a las elaboraciones teóricas surgidas de la etapa anterior destinado a alumnos del último año del Profesorado de Matemática, y que eventualmente a profesores en actividad. Como cierre, se prevé una evaluación de la propuesta de enseñanza que brindará información acerca de dificultades y potencialidades de la misma en relación al conocimiento de algunos aspectos involucrados en el aprendizaje de la demostración en geometría.

BIBLIOGRAFIA

Balacheff, **N.** (1987). *Processus de pruebe et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, vol 18 : 147-176

Ferraris, C y Siñeriz, L. (2005). *Indagación acerca de la evolución de los tipos de prueba en las producciones de alumnos de profesorado*. Resúmenes de XIX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Uruguay.

Ferraris, C**.** (1991) *Espacio – Geometría Métrica.* Ed. CRUB. Bariloche. Río Negro.

Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations*. Oxford University Press: London. [Trad. castellana: *Pruebas y refutaciones*. Alianza Ed.: Madrid, 1978].

Montoro, V. (2005). *Explorando la producción de los estudiantes de profesorado en cuanto a la demostración en geometría euclídea.* XXVIII Reunión de Educación Matemática. Organizada por la Unión Matemática Argentina. XXVIII REM - UMA. SALTA, Septiembre.

[2] Proyecto de Investigación 04B134, aprobado y subsidiado por la secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue: Dirigido por L. Siñeriz y Co-dirigido por V. Montoro; otros integrantes del mismo son: C. Ferraris, M. Ferrero y M. Juan

Montoro V. y Juan M. T. (2005). *Demostrar...demostrar...¿ Qué es eso? Modo de indagación sobre las concepciones de estudiantes de profesorado acerca de la demostración en geometría*. Memorias del VII Simposio de Educación Matemática Chivilcoy (Prov. de Bs. As). ISBN 987- 20239-3-X. Vol XII.

Polya, G. (1954): *Mathematics and Plausible* Reasoning. Vol II. Princeton University Press: Princeton, NJ. [Trad. castellana: *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid (1966)].

Polya, G. (1965) . *Cómo plantear y resolver problemas*, Ed. Trillas, México, (orig. published 1954)

Puig Adam, P. (1981): *Curso de Geometría Métrica*. Ed. Euler libros – Gómez Puig. Madrid.

Schoenfeld, A. H. (1992) . *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*, en Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NTCS, Macmillan Publishing Company, N.Y., 1992, págs.334-370. (The University of California -Berkeley).

Siñeriz, L. y Ferraris, C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un Modelo Teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. Memorias VII Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy.

Tirao, J. (1986): *El Plano*. Ed. Docencia. Buenos Aires.

Van Hiele, P.M**.** (1986): *Structure and insight*. A theory of mathematics education. Academic Press: Londres.

ANEXO

TEST 1

1) Escribe las tres primeras palabras que te vengan a la mente cuando leas las siguientes:

GEOMETRÍA: ....

DEMOSTRACIÓN: ....

JUSTIFICACIÓN: ....

2) A continuación se presentan tres enunciados referidos a cuadriláteros.

E1: Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes.

E2: Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un rectángulo.

E3: Si las diagonales de un cuadrilátero no son congruentes, entonces el cuadrilátero no es un rectángulo.

2.a) Decir si son verdaderos o falsos, justificando cada respuesta.

2. b) Referido a las enunciados anteriores. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

i) E2 se puede inferir de E1.

ii) E3 se puede inferir de E1.

iii) Para refutar E2 basta encontrar un rectángulo cuyas diagonales no son congruentes.

iv) Para demostrar E1 basta encontrar un rectángulo cuyas diagonales sean congruentes.

3) Definición: Se llama *mediatriz de un segmento* a la recta perpendicular al mismo por el punto medio.

A continuación se enuncian tres propiedades relacionadas con la mediatriz de un segmento:

P1: Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo.

P2: Las mediatrices de los lados de un triángulo tienen un punto en común.

P3: Todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia.

3.a) Demostrar P1.

3.b) Justifica la siguiente afirmación: “P2 es verdadera”.

3.c) A partir de P1 y P2 demostrar P3.

TEST 2

a) Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es equivalente a 4 rectos

b) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono de 19 lados?. Justificar

c) ¿A qué es equivalente la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados? justificar