# Juego del Keno

*Eugenio Saavedra G.*

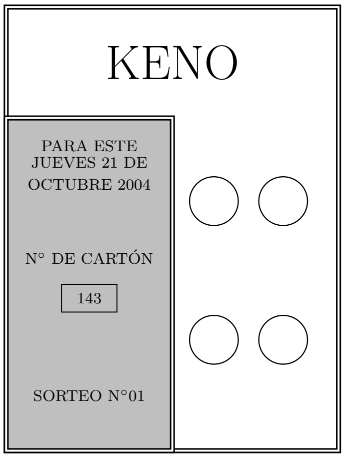
## Introducción

El propósito de este artículo, es presentar un juego de azar ficticio, el cuál permite estudiar su comportamiento aleatorio, a través de la noción frecuentista de la probabilidad. El modelo probabilista obtenido, se extiende a un par de juegos de azar que actualmente se realizan en Chile.

## 1. El Juego

En esta sección describiremos el juego (informal) llamado KENO.

Para participar en el juego, el jugador debe escoger cuatro números diferentes desde el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y marcarlos en un cartón como el que se muestra a continuación.




La casa (quien organiza el juego) sorteará cuatro pelotitas, esto es, extraerá al azar y sin reemplazo cuatro pelotitas desde un cajón que contiene 6 pelotitas numeradas del 1 al 6. Se asume que las pelotitas son de idéntico tamaño, igual textura y están a la misma temperatura.

El número de puntos que obtendrá un cartón que fue jugado, corresponderá al número de coincidencias entre los números marcados en el cartón y los números sorteados. Los cartones ganadores (si los hay) serán aquellos que tengan las cuatro coincidencias.

En la ciudad de Santiago de Chile, cinco cursos de enseñanza media, con un total de 190 estudiantes, participaron del juego KENO. Los estudiantes en total jugaron 1240 cartones.

Antes de realizar el sorteo se observarón los 1240 cartones jugados por los 190 estudiantes. Esa información se registró en la tabla siguiente.

| Combinación de Números jugados | Frecuencia Absoluta | Frecuencia Relativa | Frecuencia Relativa % |
|---|---|---|---|
| $\{1,2,3,4\}$ | 99 | 0.0798 | 7.98 % |
| $\{1,2,3,5\}$ | 75 | 0.0605 | 6.05 % |
| $\{1,2,3,6\}$ | 81 | 0.0653 | 6.53 % |
| $\{1,2,4,5\}$ | 73 | 0.0589 | 5.89 % |
| $\{1,2,4,6\}$ | 86 | 0.0694 | 6.94 % |
| $\{1,2,5,6\}$ | 95 | 0.0766 | 7.66 % |
| $\{1,3,4,5\}$ | 75 | 0.0605 | 6.05 % |
| $\{1,3,4,6\}$ | 78 | 0.0629 | 6.29 % |
| $\{1,3,5,6\}$ | 89 | 0.0718 | 7.18 % |
| $\{1,4,5,6\}$ | 88 | 0.0710 | 7.10 % |
| $\{2,3,4,5\}$ | 77 | 0.0621 | 6.21 % |
| $\{2,3,4,6\}$ | 81 | 0.0653 | 6.53 % |
| $\{2,3,5,6\}$ | 77 | 0.0621 | 6.21 % |
| $\{2,4,5,6\}$ | 86 | 0.0694 | 6.94 % |
| $\{3,4,5,6\}$ | 80 | 0.0645 | 6.45 % |
| Total | 1240 | 1.0000 | 100 % |

Tabla 1

Cabe señalar que, en la escritura de la combinación de números jugados en un cartón, usamos la notación de conjunto para enfatizar que sólo importan los números que se escogen y no su orden. Así por ejemplo, 99 cartones jugaron la combinación de números $\{1,2,3,4\}$.

Una pregunta que surgio en forma natural fue: ¿existirá otra combinación de números que se pudiera jugar?

Para responder a esta pregunta, recordamos que el número de combinaciones que pueden realizarse tomando $r$ objetos desde un total de $n$ es $\binom{n}{r}$, que es definido como cero si $r > n$ y es igual a $\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$ si $0 \leq r \leq n$ [se recomienda referencia 1 para ver un tratamiento didáctico sobre la combinatoria].

En nuestro caso se tomaron 4 objetos (los 4 números escogidos) desde un total de 6 (los números se escogen del conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$), por lo cual hay un total de $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\cdot(6-4)!} = 15$ combinaciones posibles para completar el cartón. En consecuencia, no habían más combinaciones que pudieran jugarse.

Realizado el sorteo del Juego del Keno, los números sorteados fueron 5, 6, 2 y 4. A continuación se procedió a contar el número de cartones (de los 1240) que obtuvieron 0 punto, 1 punto, 2 puntos, 3 puntos y 4 puntos (ganadores). Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

| $N^\circ$ de puntos obtenidos en el cartón ($x_i$) | Frecuencia Absoluta ($n_i$) | Frecuencia Relativa ($f_i$) | Frecuencia Relativa % ($f_i$ %) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.0000 | 0 % |
| 1 | 0 | 0.0000 | 0 % |
| 2 | 497 | 0.4008 | 40.08 % |
| 3 | 657 | 0.5298 | 52.98 % |
| 4 | 86 | 0.0694 | 6.94 % |
| Total | 1240 | 1.0000 | 100 % |

Tabla 2

La columna Frecuencia Absoluta de la tabla anterior indica el número de cartones (de los 1240) que obtuvieron el puntaje respectivo. Por ejemplo, 497 cartones obtuvieron 2 puntos.

Estos valores también pueden ser obtenidos a partir de la Tabla 1. Por ejemplo, el valor 497 se obtuvo sumando las frecuencias asociadas a las combinaciones que obtuvieron 2 puntos, es decir, a las combinaciones $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$ $\{1,2,3,6\}$ , {1,3,4,5} , {1,3,4,6} , $\{1,3,5,6\}$. Así, se obtiene que el número de cartones que obtuvieron 2 puntos es $99+75+81+75+78+89=497$.

La tabla anterior también nos muestra que hubo 86 cartones ganadores.

Ahora se planteo la pregunta: ¿Cuál fue el número promedio de puntos obtenidos en los 1240 cartones jugados?, ¿cuál fue la desviación estándar?

Se denotó por $\bar{x}$ al promedio y por $S_x$ a la desviación estándar [se recomienda referencia 4, págs. 83 y 117 para la definición y propiedades del promedio y desviación estándar, respectivamente], por lo que

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \tfrac{n_i}{1240} \\
&= 0 \cdot \frac{0}{1240} + 1 \cdot \frac{0}{1240} + 2 \cdot \frac{497}{1240} + 3 \cdot \frac{657}{1240} + 4 \cdot \frac{86}{1240} \\
&= 2.6985\,,
\end{aligned}$$

$$S_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \tfrac{n_i}{1240}} = 0.6003.$$

## 2. El Modelo

En esta sección modelamos matemáticamente el juego descrito en la sección anterior, es decir, mostramos un modelo para calcular la probabilidad de que un cartón obtenga 0 punto, 1 punto, 2 puntos, 3 puntos y 4 puntos, antes que se realize un sorteo. Además, calculamos el número esperado de puntos (promedio) y la desviación estándar.

Llamamos $\Omega$ el conjunto de todos los resultados posibles para el experimento aleatorio que estamos modelando, es decir, todas las posibles combinaciones que podrían salir sorteadas. Entonces, $\Omega$ es el conjunto formado por los elementos

$$\begin{array}{ccccc}
\{1,2,3,4\}\,, & \{1,2,3,5\}\,, & \{1,2,3,6\}\,, & \{1,2,4,5\}\,, & \{1,2,4,6\} \\
\{1,2,5,6\}\,, & \{1,3,4,5\}\,, & \{1,3,4,6\}\,, & \{1,3,5,6\}\,, & \{1,4,5,6\} \\
\{2,3,4,5\}\,, & \{2,3,4,6\}\,, & \{2,3,5,6\}\,, & \{2,4,5,6\}\,, & \{3,4,5,6\}
\end{array}$$

Notar que $\#\Omega = \binom{6}{4} = 15$.

Los resultados de este experimento aleatorio los asumimos equiprobables (los 4 números se sortean al azar). La columna 4 de la Tabla 1 muestra que este supuesto es razonable. Por este motivo usamos el modelo de Laplace para calcular probabilidades de sucesos relativos a este experimento.

Llamamos $B_k$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$, al suceso "exactamente $k$ de los 4 números que serán sorteados estarán incluidos en el cartón". En otras palabras, $B_k$ representa el suceso "obtener $k$ puntos en un cartón del próximo sorteo". Entonces,

$$P(B_k) = \frac{\#B_k}{\#\Omega} = \frac{\#B_k}{\binom{6}{4}} \ , \quad \text{for} \ \ k = 0,1,2,3,4.$$

Observamos que el conjunto $B_k$ (subconjunto de $\Omega$) no se conoce (el sorteo no ha sido realizado), sin embargo podemos calcular su cardinalidad.

Para que un cartón obtenga exactamente $k$ puntos, es decir, para que la combinación de números del cartón pertenezca a $B_k$, debe ocurrir que de los 4 números que saldrán sorteados, $k$ de estos estén en el cartón y $4-k$ estén dentro de los $6-4=2$ números que no saldrán sorteados.

Por ejemplo, para obtener 3 puntos, debe ocurrir que de los 4 números que saldrán sorteados, 3 de estos estén en el cartón y 1 esté dentro de los 2 números no sorteados.

Para calcular $\#B_k$ consideramos las decisiones $d_1$ y $d_2$.

$d_1:$ de los 4 números que saldrán sorteados, escogemos $k$,
$d_2:$ de los 2 números que no saldrán sorteados, escogemos $4-k$.

La decisión $d_1$ puede ser tomada de $\binom{4}{k}$ maneras (combinaciones de $k$ objetos en un total de 4) y la decisión $d_2$ puede ser tomada de $\binom{2}{4-k}$ formas (combinaciones de $4-k$ objetos en un total de 2).

Así, $\#B_k$ corresponde al número de maneras en que pueden tomarse las decisiones $d_1$ y $d_2$. En consecuencia, Principio Multiplicativo [se recomienda referencia 2, pág. 18, para ver aplicaciones de este principio] implica que $\#B_k = \binom{4}{k} \cdot \binom{2}{4-k}$. Por lo tanto,

$$P(B_k) = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{2}{4-k}}{\binom{6}{4}} \ , \quad k \in \{0,1,2,3,4\},$$

o sea

$$
\begin{aligned}
P(B_0) &= \frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{2}{4}}{\binom{6}{4}} = \frac{1\cdot 0}{15} = 0 \\
P(B_1) &= \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{3}}{\binom{6}{4}} = \frac{4\cdot 0}{15} = 0 \\
P(B_2) &= \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{6\cdot 1}{15} = \frac{6}{15} \\
P(B_3) &= \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{6}{4}} = \frac{4\cdot 2}{15} = \frac{8}{15} \\
P(B_4) &= \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{6}{4}} = \frac{1\cdot 1}{15} = \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

Es decir, el modelo de probabilidades que describe el Juego del Keno quedó determinado por la función (llamada de cuantía) $p(k) = P(B_k)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Así, la media (o promedio) [se recomienda referencia 3, pág. 97, para propiedades de las distribuciones de probabilidad discretas] de puntos para un cartón es, según este modelo, igual a

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{4} k\cdot p(k) &= 0\cdot p(0) + 1\cdot p(1) + 2\cdot p(2) + 3\cdot p(3) + 4\cdot p(4) \\
&= 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{6}{15} + 3\cdot\frac{8}{15} + 4\cdot\frac{1}{15} \\
&= \frac{8}{3},
\end{aligned}
$$

y la desviación estándar es

$$
\sqrt{\sum_{k=0}^{4}(k-\tfrac{8}{3})^2\cdot p(k)} = \frac{4}{3\sqrt{5}}.
$$

A continuacion mostramos una tabla comparativa entre los resultados obtenidos experimentalmente (juego realizado entre los estudiantes de los 5 cursos) y los resultados obtenidos a través del modelo matemático propuesto.

Tabla Comparativa

| | Resultados obtenidos experimentalmente | Resultados obtenidos con el modelo |
|---|---|---|
| $k$ | Frecuencia Relativa de $k$ puntos | Probabilidad de obtener $k$ puntos |
| 0 | 0.0000 | $0 = 0.0000$ |
| 1 | 0,0000 | $0 = 0.0000$ |
| 2 | 0.4008 | $\frac{6}{15} = 0.4000$ |
| 3 | 0.5298 | $\frac{8}{15} = 0.5333$ |
| 4 | 0.0694 | $\frac{1}{15} = 0.0667$ |
| Promedio puntos | 2.6985 | $\frac{8}{3} = 2.6667$ |
| Desviación estándar | 0.6003 | $\frac{4}{3\sqrt{5}} = 0.5963$ |

Tabla 3

# 3. El Juego Verdadero

En esta sección generalizamos el modelo del juego del KENO para describir dos juegos de azar que se realizan en la actualidad en Chile. Uno llamado KINO, el cuál pertenece a la Loteria de Concepción de Chile (puede verse en www.loteria.cl) y el otro llamado LOTO, perteneciente a la Polla Chilena de Beneficencia de Chile (puede verse en www.pollachilena.cl).

Supongamos que en el Juego del Keno, en lugar de 6 pelotitas idénticas, numeradas del 1 al 6, tenemos 25 pelotitas idénticas, numeradas del 1 al 25 y en el cartón figuran 14 números diferentes escogidos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 25\}$, en lugar de 4 números diferentes escogidos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Además, el juego (ahora llamado KINO, consiste en sortear 14 pelotitas (sin reposición) desde una urna que contiene las 25.

Los ganadores del premio mayor (si los hay) serán aquellos cartones que obtengan 14 puntos, es decir, el cartón debe contener los 14 números sorteados.

Para modelar este juego, seguimos un razonamiento análogo al del Juego del Keno. Así, en este caso $\#\Omega = \binom{25}{14} = 4457400$ (por supuesto que no mostramos explicitamente todas estas posibles combinaciones).

También, si $B_k$ es el suceso "obtener $k$ puntos en un cartón", $k \in \{0, 1, \ldots, 14\}$, entonces $\#B_k = \binom{14}{k} \cdot \binom{11}{14-k}$.

En consecuencia, el modelo para el juego KINO queda descrito por la función

$$p(k) = P(B_k) = \frac{\binom{14}{k} \cdot \binom{11}{14-k}}{\binom{25}{14}}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 14\}.$$

Notar que, para $k \in \{0, 1, 2\}$, $p(k) = 0$, pues en estos casos $\binom{11}{14-k} = 0$, $(14 - k > 11)$. Es decir, en el juego del KINO no es posible obtener menos de 3 puntos en un cartón.

La tabla siguiente muestra los valores de $p(k)$, para $k \in \{3, 4, \ldots, 14\}$.

| $k$ | $p(k)$ |
|---|---|
| 3 | 0.000081662 |
| 4 | 0.002470274 |
| 5 | 0.024702742 |
| 6 | 0.111162337 |
| 7 | 0.254085341 |
| 8 | 0.311254543 |
| 9 | 0.207503029 |
| 10 | 0.074108225 |
| 11 | 0.013474223 |
| 12 | 0.001122852 |
| 13 | 0.000034549 |
| 14 | 0.000000224 |

Tabla 4

En consecuencia, si compramos un cartón del juego de azar KINO, la probabilidad de ganarnos el premio mayor (acertar los 14 puntos) es 0.000000224.

También, el número esperado de aciertos para un cartón del juego KINO es igual a

$$0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + \cdots + 13 \cdot p(13) + 14 \cdot p(14) = 7.84.$$

y las desviación estándar resultante es 1.2574.

En el caso del otro juego de azar llamado LOTO, se tienen 39 pelotitas idénticas, numeradas del 1 al 39, en el cartón figuran 6 números pertenecientes al conjunto $\{1, 2, \ldots, 38, 39\}$ y se extraen 6 pelotitas, al azar, sin reposición, desde una urna con las 39 pelotitas.

Los ganadores del premio mayor (si los hay) serán aquellos cartones que obtengan 6 puntos (el cartón debe contener los 6 números sorteados).

En este caso el modelo queda descrito por la función

$$p(k) = P(B_k) = \frac{\#B_k}{\#\Omega}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, 6\},$$

donde $\Omega$ es el conjunto de todas las posibles combinaciones que pueden jugarse en el LOTO y $B_k$ es el suceso "obtener $k$ puntos en un cartón".

De similar forma que en el Juego del Keno, se tiene que

$$\#\Omega = \binom{39}{6} = 3262623 \quad y \quad \#B_k = \binom{6}{k} \cdot \binom{33}{6-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, 6\}.$$

La tabla siguiente muestra los valores de $p(k)$, para $k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$.

| $k$ | $p(k)$ |
|---|---|
| 0 | 0.339471696 |
| 1 | 0.436463545 |
| 2 | 0.188130838 |
| 3 | 0.003344548 |
| 4 | 0.002427495 |
| 5 | 0.000060687 |
| 6 | 0.000000307 |

Tabla 5

Por lo tanto, si compramos un cartón del juego LOTO, la probabilidad de ganarnos el premio mayor (acertar los 6 puntos) es 0.000000307.

En este caso, el número esperado de puntos para un cartón es

$$0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) + 5 \cdot p(5) + 6 \cdot p(6) = 0.832774122$$

y la desviación estándar 0.738287109.

## Conclusion

El juego del KENO provee una interesante actividad de clase que permite mostrar como modelar una situación de la vida real, en donde está presente el azar, a través de probabilidades.

Para realizar la actividad se recomienda comenzar repartiendo a cada alumno cartones del juego KENO (de 6 a 8 cartones) para que estos sean jugados. Luego formar grupos de 3 o 4 estudiantes, los que ordenan las combinaciones jugadas por ellos en una tabla análoga a la Tabla 1. Los grupos intercambian sus datos y se obtienen los resultados del curso completo. Para tener alrededor de 1000 cartones jugados, el profesor puede llevar las combinaciones jugadas por otros cursos. La información recolectada se lleva a una hoja de cálculo (por ejemplo Excel) y luego se desarrollan en ésta todos los cálculos involucrados en las Tablas 1,2, 4 y 5.

## Referencias


[1] Batanero, $M^a$.; Godino, J.; Navarro-Pelayo, V. (1996) *Razonamiento Combinatorio*, Editorial Síntesis, Madrid, España.

[2] Fernandez, P. y otros (2000) *Análise Combinatória e Probabilidade*, Colecáo do Professor de Matemática, Sociedad Brasileira de Matemática, Río de Janeiro, Brasil.

[3] Morettin, P. y Bussab, W. (1991) *Métodos Quantitativos: Estatística Básica*, $4^a$ edición, Atual Editora, Sao Paulo, Brasil.

[4] Saavedra, E. (2005) *Contenidos Básicos de Estadística y Probabilidades.* Sello Editorial Universidad de Santiago, Santiago, Chile.



Departamento de Matemáticas, Universidad de Santiago de Chile
Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile.
email: keno@usach.cl