Lógica Simbólica y Teoría de Conjuntos
Parte I

Juan Carlos Bressan y Ana E. Ferrazzi de Bressan

Resumen

En este trabajo, la utilización de la lógica simbólica y de los conjuntos se hace desde un punto de vista *intuitivo*, ya que se persigue básicamente un fin didáctico.

En esta Parte I se introducen simultáneamente las proposiciones, funciones proposicionales y sus conjuntos de verdad. Cada conectiva definida mediante una tabla de verdad, se relaciona con la operación entre conjuntos correspondiente. Las tautologías se utilizan para diferenciar el condicional de la implicación lógica, así como el bicondicional de la equivalencia lógica.

En la Parte II, que aparecerá en el próximo número, se analizarán las tautologías y las formas de razonamiento válidas, se relacionará el cuantificador universal con la conjunción y la intersección de familias de conjuntos. Análogamente, se procederá con el cuantificador existencial relacionándolo con la disyunción inclusiva y la unión de familias de conjuntos. Se destacarán la diferencia entre demostraciones por el contrarrecíproco y por el absurdo y la importancia en el orden en que se escriben los cuantificadores en Matemática.

1. Introducción

En los diversos desarrollos de la Matemática se toman como teorías subyacentes la teoría clásica de conjuntos y una lógica superior de predicados, en la que, además de cuantificar elementos podamos también cuantificar predicados, relaciones, etc. De esta forma, la herramienta lógica permite trabajar con conjuntos, conjuntos de partes, relaciones entre conjuntos, funciones, etc. Esta teoría intuitiva de conjuntos y esta lógica de predicados presentan antinomias bien conocidas desde principios del siglo XX. Las teorías axiomáticas de conjuntos así como las Lógicas formales tienen por objetivo evitar estas paradojas, sin embargo, desde el punto de vista didáctico resultan en una primera etapa poco exitosas.

En general, el lenguaje simbólico presenta algunas diferencias entre los diversos libros de lógica y los de matemática. Sin embargo, para la mayoría de matemáticos que no efectúan desarrollos axiomáticos de la teoría de conjuntos ni de la lógica, resulta suficiente utilizar una simbología lógica que le resulte clara y que no requiera excesivas convenciones.

Estas herramientas que el alumno universitario debiera haberlas incorporado en la enseñanza media, no llega a relacionarlas y a apreciar en su totalidad. A lo anterior es necesario sumarle la heterogeneidad de la enseñanza media y secundaria. De allí que al llegar el alumno a la enseñanza terciaria o universitaria sea necesario, para desarrollar los cursos de Matemática, hacer un estudio conciso de las nociones básicas de la teoría de conjuntos y de la lógica para poder utilizarlas fluidamente. Desarrollar la teoría de conjuntos relacionándola con la lógica, no solamente resulta didáctico sino que minimiza el tiempo necesario para su enseñanza.

Si bien hacemos un desarrollo en paralelo del simbolismo lógico y la teoría de conjuntos presuponemos que los alumnos ya cuentan con ciertos conocimientos sobre los conjuntos y sus operaciones desde el nivel básico.

El enfoque que seguiremos en el desarrollo de la Lógica será puramente semántico por cuanto nos interesa como una herramienta a utilizar en Matemática. El trabajo nos permitirá presentar la introducción de los temas, y la forma que, de acuerdo a nuestra práctica docente, resulta más adecuada para su enseñanza.

2. Notaciones de la Lógica Simbólica

Las notaciones que se utilizan en Lógica Simbólica presentan diferencias según la fuente consultada. El simbolismo lógico adoptado es análogo al de Hamilton, A. G. (1981), aunque con algunos abusos de notación a efectos de simplificar las fórmulas. Por ejemplo, en los cuantificadores además de la variable indicamos el dominio al cual pertenece la indeterminada; así en la definición de límite funcional escribiremos $(\forall e > 0)(\exists d > 0)(...)$. Estas expresiones, como señala Bosch, J (1965), si bien son incorrectas desde un punto de vista lógico, son matemáticamente aceptadas. Pensamos que uno de los posibles motivos por los cuales no se utiliza en forma sistemática el simbolismo lógico en Matemática es su excesivo formalismo, de allí que nos resulte conveniente cometer estos *abusos de lenguaje* para lograr una notación simplificada que no se preste a ambigüedades y facilite el trabajo. Igual conducta seguiremos al definir conjuntos por comprensión, indicando después de la variable el conjunto universal o referencial; así en lugar de $A = \{ x : x \in N \wedge 3 < x < 9 \}$; escribiremos $A = \{ x \in N : 3 < x < 9 \}$, como también lo hace Gamut, L. T. F. (2002). Desde el punto de vista didáctico pensamos que no conviene apegarse a convenciones preestablecidas sobre los paréntesis, sino hacer un uso, aunque sea excesivo, de paréntesis, corchetes y de ser necesario llaves, que evite todo tipo de ambigüedades.

3. Secuencia lógica de contenidos

Este trabajo se ha pensado para relacionar conceptos que aún conociéndolos algunas veces, no se presentan con una secuencia lógica que permita a partir de unos inducir otros. La secuencia de las Partes I y II es la siguiente:

Parte I:

(i) Uso de proposiciones como motivadoras de las funciones proposicionales.

(ii) Relación de los conjuntos de verdad con las funciones proposicionales.

(iii) Definición de operaciones lógicas entre funciones proposicionales: conectivas.

(iv) Relación de las conectivas con las operaciones conjuntistas de sus conjuntos de verdad.

Parte II:
(v) Implicación lógica de proposiciones; su relación con formas de razonamiento válidos.
(vi) Proposiciones por aplicación de cuantificadores a las funciones proposicionales. Su relación con los conjuntos de verdad.
(vii) Negación y orden de los cuantificadores.

4. Proposiciones, Funciones o Formas Proposicionales y Conjuntos de Verdad

Recordemos que una *proposición* es una oración o sentencia la cual puede ser únicamente verdadera (V) o falsa (F). Una *función o forma proposicional* es una expresión que se convierte en proposición al asignarle valor a las indeterminadas.
Consideremos, los siguientes ejemplos:
a) “5 es un número primo”, es una proposición verdadera.
b) “El número natural x es tal que $x > 10$”, es una función proposicional $b(x)$, que se transformará en una proposición cuando reemplacemos la variable x por un elemento del conjunto N de los números naturales, pudiendo entonces adjudicársele un valor de verdad. N es el *conjunto universal o referencial* considerado.
c) “El par ordenado de números reales (x, y) satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 4$”. es una función proposicional $c(x, y)$ en dos variables x, y; este par de variables puede considerarse como una variable bidimensional (x, y), siendo el conjunto universal considerado R^2.
d) “¿Cuál es la altura del monte Aconcagua?”, se enuncia una pregunta, por lo tanto no es proposición ni función proposicional.
e) “Por favor, necesito que me prestes ese libro hasta mañana”, se enuncia un pedido, por lo tanto no es proposición ni función proposicional.
f) “La cordillera de los Andes se encuentra en Europa”, es una proposición falsa.
g) “En el Universo hay seres inteligentes en otras galaxias”, es una proposición si bien aún no se conoce su valor de verdad.
Para las funciones proposicionales dadas en b) y c) queda definido su *conjunto de verdad.* Así, los conjuntos de verdad de b) y c) serán respectivamente, B y C que están definidos por

$$B = \{ x \in N : x > 10 \} = \{ x \in N : b(x) \}$$

$$C = \left\{ (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 4 \right\} = \left\{ (x, y) \in R^2 : c(x, y) \right\}.$$

Si un conjunto está definido mediante una propiedad o función proposicional que cumplen sus elementos se dice que está definido por *comprensión.* En los conjuntos B y C, por tener infinitos elementos, necesariamente deben ser definidos por comprensión. Cuando el conjunto es finito su definición puede ser por extensión, enumerando todos sus elementos; pero también por comprensión mediante una forma proposicional, como veremos al estudiar las conectivas. Esto permite que en todos los casos consideremos que los conjuntos están definidos por comprensión mediante una forma proposicional lo cual nos permitirá relacionar las operaciones lógicas con las operaciones con conjuntos.

5. Conectivas y Operaciones con Conjuntos

Introduciremos únicamente las conectivas *veritativo-funcionales*, que definen una *proposición compuesta*, cuyo valor de verdad queda determinado por los valores de verdad de las proposiciones dadas. Las conectivas serán introducidas para proposiciones mediante su tabla de verdad como motivadoras de las conectivas aplicadas a funciones proposicionales y a la operación asociada con los conjuntos de verdad.

5.1. Negación de funciones proposicionales y complementario de conjuntos

Comenzaremos viendo la negación, la cual es una conectiva que se aplica a una única proposición o función proposicional. Sea por ejemplo la proposición p: "9 es un número impar", la cual es verdadera y por tanto, su negación $\neg p$: "9 no es un número impar" es falsa. Por otra parte, si tomáramos una proposición q que fuera falsa, resultaría $\neg q$ verdadera.

En las funciones proposicionales las variables deben tomar sus valores en el conjunto universal o referencial U correspondiente. Así, en las funciones proposicionales del parágrafo 4, $b(x)$ toma sus valores para $x \in N$, mientras que en $c(x,y)$ es $(x,y) \in R^2$. De esta forma, si negamos dichas funciones proposicionales tendremos:

$\neg b(x)$: "El número natural x es tal que $x \leq 10$".

$\neg c(x,y)$: "El par ordenado de números reales (x,y) satisface la inecuación $x^2 + y^2 \neq 4$".

Sabemos que $\neg b(x)$ define el conjunto

$$B' = \{ x \in N : \neg b(x) \} = \{ x \in N : x \leq 10 \} .$$

Análogamente, $\neg c(x,y)$ define

$$C' = \left\{ (x,y) \in R^2 : \neg c(x,y) \right\} = \left\{ (x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq 4 \right\} .$$

El conjunto B' es el *complementario* de B y C' lo es de C.

Exhibimos en paralelo las Tablas 1 y 2. La primera presenta los valores de verdad de la proposición p y de $\neg p$. En la Tabla 2 se consideran los valores de verdad de la función proposicional $b(x)$ y de su negación $\neg b(x)$, destacando la equivalencia entre $b(x)$ y $x \in B$, y entre $\neg b(x)$ y $x \in B'$.

p	$\neg p$	$b(x)$	$\neg b(x)$
		$x \in B$	$x \in B'$
V	F	V	F
F	V	F	V
Tabla 1		Tabla 2	

5.2. Conjunción de funciones proposicionales e intersección de conjuntos

A continuación trabajaremos con conectivas que se aplican a dos proposiciones o funciones proposicionales. La primera que estudiaremos es la conjunción, la cual será verdadera si y solo si ambas proposiciones o ambas funciones proposicionales son verdaderas.

Sean las proposiciones p: "La Tierra gira alrededor del Sol"; q: "La Luna gira alrededor de la Tierra" ambas verdaderas. Su conjunción es $p \wedge q$: "La Tierra gira alrededor del Sol y la Luna gira alrededor de la Tierra", que en consecuencia es verdadera.

Sean ahora las dos funciones proposicionales: $a(x)$: "El número natural x es par", $b(x)$: "El número natural x es múltiplo de 3".

Estas funciones proposicionales definen los siguientes subconjuntos del mismo conjunto referencial N:

$$A = \{x \in N : a(x)\} = \{x \in N : x \textit{ es par}\},$$

$$B = \{x \in N : b(x)\} = \{x \in N : x \textit{ es múltiplo de } 3\}.$$

Su conjunción es $a(x) \wedge b(x)$: "El número natural x es par y múltiplo de 3".

Esta función proposicional será verdadera únicamente para aquellos $x \in N$ tales que $a(x)$ y $b(x)$ sean ambas verdaderas. El conjunto definido por $a(x) \wedge b(x)$ es la intersección:

$$A \cap B = \{\, x \in N : a(x) \wedge b(x) \,\} = \{\, x : x \in A \wedge x \in B \,\} =$$

$$= \{\, x \in N : x \textit{ es múltiplo de } 6 \,\}.$$

Las Tablas 3 y 4 exhiben en paralelo los valores de verdad de las proposiciones y su conjunción, así como de las formas proposicionales y su conjunción, destacando la equivalencia entre $a(x)$ y $x \in A$, $b(x)$ y $x \in B$ y entre $a(x) \wedge b(x)$ y $x \in A \cap B$.

p	q	$p \wedge q$	$a(x)$	$b(x)$	$a(x) \wedge b(x)$
			$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F
Tabla 3			Tabla 4		

A continuación trataremos la operación de diferencia entre dos conjuntos como consecuencia de las operaciones ya estudiadas. Sean dos conjuntos que deben estar definidos sobre el mismo referencial U, $A = \{x \in U : a(x)\}$ y $B = \{x \in U : b(x)\}$. Definimos la *diferencia* de A menos B como el conjunto $A - B = \{x \in U : a(x) \wedge \neg b(x)\} = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B'\} = A \cap B'$. De esta forma, podemos expresar el conjunto A', complementario de A, mediante la operación de diferencia; en efecto, $U - A = U \cap A' = A'$. Aclaremos que, otra notación utilizada para la diferencia es $A \backslash B$.

5.3. La disyunción inclusiva y la exclusiva

La conectiva "o" en castellano tiene dos usos bien diferenciados, la disyunción inclusiva y la exclusiva, que en Lógica deben ser denotadas con símbolos distintos. Como veremos más adelante, estas dos conectivas hacen válido el razonamiento llamado *silogismo disyuntivo*, por el cual de la verdad de la premisa $p\ o\ q$ y de la verdad de la premisa $\neg p$, se deduce la verdad de la conclusión q, lo cual suele escribirse en forma simbólica

$$\begin{array}{c} p\ o\ q \\ \underline{\neg p} \\ q \end{array}.$$

En este caso la conectiva "o" simboliza la disyunción inclusiva así como la exclusiva.

5.3.1. Disyunción inclusiva de funciones proposicionales y unión de conjuntos

A continuación estudiaremos la disyunción inclusiva, la cual será verdadera si y solo si una de las dos o ambas proposiciones o funciones proposicionales son verdaderas.
Así, con las proposiciones p: "Daré los libros deteriorados", q: "Daré los libros que no use", formamos la proposición $p \vee q$: "Daré los libros deteriorados o los que no use". Evidentemente, si un libro está deteriorado y además no lo uso también lo daré, es decir, el "o" es inclusivo; de allí que para evitar ambigüedades en documentos suele escribirse y/o. Considerando las funciones proposicionales $a(x)$, $b(x)$ del parágrafo

5.2, el conjunto definido por $a(x) \vee b(x)$ es la unión de ambos conjuntos A, B. Así definimos la unión:

$$A \cup B = \{ x \in N : a(x) \vee b(x) \} = \{ x : x \in A \vee x \in B \} =$$
$$= \{ x \in N : x \; es \; múltiplo \; de \; 2 \; y/o \; de \; 3 \}.$$

Las Tablas 5 y 6 exhiben en paralelo los valores de verdad de las proposiciones y su disyunción inclusiva, así como las correspondientes de las funciones proposicionales, destacando la equivalencia entre $a(x)$ y $x \in A$, $b(x)$ y $x \in B$ y entre $a(x) \vee b(x)$ y $x \in A \cup B$.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 5

$a(x)$	$b(x)$	$a(x) \vee b(x)$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 6

5.3.2. Disyunción exclusiva de funciones proposicionales y diferencia simétrica de conjuntos

A continuación estudiaremos la disyunción exclusiva, la cual será verdadera si y solo si una sola de ambas proposiciones o funciones proposicionales es verdadera.

De esta forma, con las proposiciones: p: "Mañana a las 22 hs iré a visitarte", q: "Mañana a las 22 hs iré al cine", podemos formar la proposición $p \,\nabla\, q$: "Mañana a las 22 hs iré a visitarte o iré al cine". En este caso, la conectiva "∇" es el "o" excluyente, por cuanto, $p \,\nabla\, q$ será verdadera en aquellos casos en que una de las dos proposiciones sea verdadera y la otra falsa pues no puede haber simultaneidad en ambas acciones. Destaquemos que en el lenguaje escrito una forma de evitar confusiones es enfatizar el significado excluyente del "o" escribiendo "o bien".

Mediante la Tabla 7 vemos que $p \,\nabla\, q$ es *lógicamente equivalente* a $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$, pues ambas proposiciones compuestas tienen en las correspondientes filas los mismos valores de verdad. Una forma de indicar la equivalencia lógica de dichas proposiciones compuestas es mediante $[p \,\nabla\, q] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)]$, donde el símbolo "$\Leftrightarrow$" será utilizado para representar la equivalencia lógica.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	$p \nabla q$
V	V	V	V	F	**F**	**F**
V	F	V	F	V	**V**	**V**
F	V	V	F	V	**V**	**V**
F	F	F	F	V	**F**	**F**

Tabla 7

Considerando las funciones proposicionales $a(x)$ y $b(x)$ del parágrafo 5.2, el conjunto definido por $a(x)\nabla b(x)$ es la diferencia simétrica de los conjuntos A y B:

$$A \,\Delta\, B = \{x \in N : a(x) \nabla b(x)\} = \{x : x \in A \nabla x \in B\} =$$
$$= \{x \in N : x \textit{ es múltiplo de } 2, \textit{ o bien de } 3, \textit{ pero no de ambos}\}$$

De $[p \nabla q] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)]$, resulta

$[a(x) \nabla b(x)] \Leftrightarrow [(a(x) \vee b(x)) \wedge \neg(a(x) \wedge b(x))]$. En consecuencia, esta última equivalencia lógica permite obtener la siguiente igualdad entre los correspondientes conjuntos definidos por las funciones proposicionales:

$$A \,\Delta\, B = \{x \in N : a(x) \nabla b(x)\} = \{x \in N : (a(x) \vee b(x)) \wedge \neg(a(x) \wedge b(x))\} =$$
$$= \{x : x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\} = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$$

La diferencia simétrica también puede expresarse mediante la diferencia entre conjuntos. En efecto $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$. Esta última expresión justifica se la designe *diferencia simétrica*.

Las Tablas 8 y 9 exhiben en paralelo los valores de verdad de las proposiciones y su disyunción excluyente, así como las correspondientes de las formas proposicionales, destacando la equivalencia entre $a(x)$ y $x \in A$, $b(x)$ y $x \in B$ y entre $a(x)\nabla b(x)$ y $x \in A\Delta B$.

p	q	$p\nabla q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 8

$a(x)$	$b(x)$	$a(x)\nabla b(x)$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A\Delta B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 9

Conviene hacer notar que el símbolo "∇" para denotar la disyunción exclusiva no es de uso frecuente, aunque es utilizado en Klimovsky, G. y Boido, G. (2005).

Cuando un subconjunto de un referencial está definido por extensión, las disyunciones inclusiva y exclusiva permiten expresarlo por comprensión. Tomemos por ejemplo el subconjunto M de los números naturales, tal que $M = \{3; 8; 15\}$ y las funciones proposicionales

$$m_1(x) : [(x=3) \vee (x=8) \vee (x=15)], \text{ y } m_2(x) : [(x=3) \,\nabla\, (x=8) \,\nabla\, (x=15)]$$

donde $x \in N$. Ambas formas proposicionales toman los mismos valores de verdad para los mismos valores de $x \in N$, pues en cada caso se da una sola igualdad por vez. Así, $M = \{x \in N : m_1(x)\} = \{x \in N : m_2(x)\}$. Destacamos la importancia del referencial, por cuanto al definir un conjunto por comprensión, su complementario depende del referencial considerado. En nuestro ejemplo $M = \{3; 8; 15\}$, si bien para $x \in N$ o para $x \in Z$ resulta $M = \{x \in N : m_1(x)\} = \{x \in N : m_2(x)\} = \{x \in Z : m_1(x)\} = \{x \in Z : m_2(x)\}$, sin embargo, serían distintos los complementarios según sea el conjunto referencial N o Z.

5.4. Condicional o implicación material, bicondicional

El condicional o implicación material "si p, *entonces* q", que simbolizaremos $p \to q$, es la conectiva con mayores dificultades para definirla por una tabla de verdad, puesto que en general y principalmente en Matemática, su consecuente q se deduce de su antecedente p. En la tabla de verdad no figura esta relación, de allí que para introducirla conviene destacar que la tabla de verdad debe respetar la forma de razonamiento *modus ponens* por la cual de la verdad de la premisa $p \to q$ y de la verdad de la premisa p, se deduce la verdad de la conclusión q. Por tal motivo admitiremos que únicamente $p \to q$ será falsa cuando p sea verdadera y q sea falsa. Como veremos en la tabla 10, $p \to q$ es lógicamente equivalente a $(\neg p) \vee q$, pues tienen los mismos valores de verdad.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
V	V	**V**	F	**V**
V	F	**F**	F	**F**
F	V	**V**	V	**V**
F	F	**V**	V	**V**

Tabla 10

En el caso de la función proposicional $a(x) \to b(x)$, y de los conjuntos de verdad A y B correspondientes respectivamente a $a(x)$ y a $b(x)$, obtenemos que $a(x) \to b(x)$ es lógicamente equivalente a $(\neg a(x)) \vee b(x)$, de donde

$$\{\, x \in U : a(x) \to b(x) \,\} = \{\, x \in U : (\neg a(x)) \vee b(x) \,\} = A' \cup B.$$

Así, conviene enfatizar que el conjunto $A' \cup B$ está formado por todos aquellos $x \in U$ que satisfacen la función proposicional $a(x) \to b(x)$.

Observemos que los elementos $x \in U$ que satisfacen $a(x) \to b(x)$ forman el conjunto $A' \cup B$. Luego, si para todo $x \in U$, $a(x) \to b(x)$, entonces $\{ x \in U : a(x) \to b(x) \} = U$. Como por definición de inclusión, $A \subseteq B$ si y solo si para todo $x \in U$, $a(x) \to b(x)$, se tendrá que $A \subseteq B$ si y solo si $A' \cup B = U$.

Un problema que se detecta es una utilización deficiente de las diversas formas coloquiales de la implicación material. Debemos generar en nuestros alumnos la destreza en la comprensión de las formas coloquiales equivalentes de dicha implicación: "si p, q", "q si p", "p solo si q", "p es condición suficiente para q", "q es condición necesaria para p". Las formas que resultaron más adecuadas para la enseñanza son $p \to q$, o su traducción coloquial "p implica q" y "si p, entonces q". No obstante, es importante insistir en la condición suficiente y en la necesaria puesto que suelen figurar en enunciados de proposiciones y teoremas.

También, es necesario destacar que dada la implicación $p \to q$ que llamaremos *implicación directa*, se pueden considerar la *reciproca* $q \to p$, la *contraria* $(\neg p) \to (\neg q)$, y la *contrarrecíproca* $(\neg q) \to (\neg p)$. Puede comprobarse mediante las tablas de verdad la equivalencia lógica entre la implicación directa y la contrarrecíproca, así como la equivalencia lógica entre la implicación recíproca y la contraria. Estos resultados quedan expresados por medio de: $[p \to q] \Leftrightarrow [(\neg q) \to (\neg p)]$ (Tabla 11) y $[q \to p] \Leftrightarrow [(\neg p) \to (\neg q)]$ (Tabla 12).

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q) \to (\neg p)$
V	V	**V**	F	F	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**V**	V	F	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**

Tabla 11

p	q	$q \to p$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \to (\neg q)$
V	V	**V**	F	F	**V**
V	F	**V**	F	V	**V**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	F	**V**	V	V	**V**

Tabla 12

La conjunción de la implicación directa $p \to q$ con su recíproca $q \to p$ es el *bicondicional* que denotaremos con $p \leftrightarrow q$. Así, por su definición $p \leftrightarrow q$ es lógicamente equivalente a $(p \to q) \wedge (q \to p)$. La forma coloquial de $p \leftrightarrow q$ es "p si y solo si q" o también "p es condición necesaria y suficiente para q". Su tabla de verdad figura en la quinta columna de la Tabla 13. De la comparación de las columnas 5 y 7 de dicha tabla, resulta que $p \leftrightarrow q$ y $\neg(p \,\nabla\, q)$ tienen los mismos valores de verdad, por lo cual son lógicamente equivalentes. En consecuencia, obtenemos $[p \leftrightarrow q] \Leftrightarrow [\neg(p \,\nabla\, q)]$.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$p \nabla q$	$\neg(p \nabla q)$
V	V	V	V	**V**	F	**V**
V	F	F	V	**F**	V	**F**
F	V	V	F	**F**	V	**F**
F	F	V	V	**V**	F	**V**

Tabla 13

En este momento resulta interesante destacar la relación entre la equivalencia lógica que simbolizamos mediante "$\Leftrightarrow$" y el bicondicional o equivalencia material "$\leftrightarrow$". Como puede verse en la tabla del bicondicional, sus valores de verdad dependen de los valores de p y de q, resultando el bicondicional verdadero únicamente cuando p y q tienen los mismos valores de verdad. Por otra parte, dos proposiciones compuestas son lógicamente equivalentes si y solo si tienen los mismos valores de verdad. De esta forma, si tomamos alguna de las equivalencias lógicas dadas anteriormente, por ejemplo, $[p \,\nabla\, q] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)]$ y hacemos la tabla de verdad de $[p \,\nabla\, q] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)]$, la columna del bicondicional toma únicamente el valor verdadero, independientemente de los valores de verdad de p y de q. En tal caso, decimos que es una *tautología*. De esta forma podemos caracterizar las equivalencias lógicas mediante el bicondicional. Así,

$[p \to q] \Leftrightarrow [(\neg q) \to (\neg p)]$ significa: $[p \to q] \leftrightarrow [(\neg q) \to (\neg p)]$ es tautología.

$[q \to p] \Leftrightarrow [(\neg p) \to (\neg q)]$ significa: $[q \to p] \leftrightarrow [(\neg p) \to (\neg q)]$ es tautología.

5.5. Equivalencia lógica de funciones proposicionales e igualdad de conjuntos

Comenzaremos con un ejemplo en el que intervengan dos conjuntos $A = \{x \in U : a(x)\}$ y $B = \{x \in U : b(x)\}$. Probaremos mediante las Tablas 14 y 15 la equivalencia lógica $\neg[a(x) \wedge b(x)] \Leftrightarrow [(\neg a(x)) \vee (\neg b(x))]$, de la que se deducen $x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$ y $(A \cap B)' = A' \cup B'$, conocida como *Ley de De Morgan*.

$a(x)$	$b(x)$	$a(x)\wedge b(x)$	$\neg[a(x)\wedge b(x)]$
$x\in A$	$x\in B$	$x\in A\cap B$	$x\in (A\cap B)'$
V	V	V	**F**
V	F	F	**V**
F	V	F	**V**
F	F	F	**V**

Tabla 14

$a(x)$	$b(x)$	$\neg a(x)$	$\neg b(x)$	$(\neg a(x))\vee(\neg b(x))$
$x\in A$	$x\in B$	$x\in A'$	$x\in B'$	$x\in A'\cup B'$
V	V	F	F	**F**
V	F	F	V	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	V	**V**

Tabla 15

De la comparación de las últimas columnas de las Tablas 14 y 15, vemos que tienen la misma ubicación de los valores de verdad. De esta forma, si hiciéramos la tabla de verdad de $\neg\,[a(x)\wedge b(x)]\leftrightarrow[(\neg a(x))\vee(\neg b(x))]$ obtendríamos en todos los casos el valor verdadero V, es decir, resultaría una tautología. En consecuencia, se puede reemplazar el bicondicional "$\leftrightarrow$" por la equivalencia lógica "$\Leftrightarrow$" y afirmar que las funciones proposicionales $\neg[a(x)\wedge b(x)]$ y $(\neg a(x))\vee(\neg b(x))$ son lógicamente equivalentes. De esta forma, $x\in (A\cap B)'\leftrightarrow x\in A'\cup B'$, es también una tautología, de donde por definición de igualdad entre conjuntos resulta $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

Sean ahora los conjuntos $A=\{x\in U : a(x)\}$, $B=\{x\in U : b(x)\}$ y $C=\{x\in U : c(x)\}$. Probaremos la equivalencia lógica

$$[a(x)\vee b(x)]\wedge c(x)\Leftrightarrow[a(x)\wedge c(x)]\vee[b(x)\wedge c(x)]$$

Tal equivalencia se obtendrá mediante las Tablas 16 y 17 que cuentan con ocho, 2^3, filas de valores de verdad ya que intervienen tres proposiciones. A partir de ellas deduciremos la *ley distributiva de la intersección con respecto a la unión* de conjuntos $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$a(x) \vee b(x)$	$[a(x) \vee b(x)] \wedge c(x)$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cup B$	$x \in (A \cup B) \cap C$
V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	**F**
V	F	V	V	**V**
V	F	F	V	**F**
F	V	V	V	**V**
F	V	F	V	**F**
F	F	V	F	**F**
F	F	F	F	**F**

Tabla 16

$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$a(x) \wedge c(x)$	$b(x) \wedge c(x)$	$[a(x) \wedge c(x)] \vee [b(x) \wedge c(x)]$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cap C$	$x \in B \cap C$	$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$
V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	F	F	**F**
V	F	V	V	F	**V**
V	F	F	F	F	**F**
F	V	V	F	V	**V**
F	V	F	F	F	**F**
F	F	V	F	F	**F**
F	F	F	F	F	**F**

Tabla 17

De la comparación de las últimas columnas de estas tablas, vemos que tienen la misma ubicación de los valores de verdad; luego, si hiciéramos la tabla de verdad de la función proposicional

$$[a(x) \vee b(x)] \wedge c(x) \leftrightarrow [a(x) \wedge c(x)] \vee [b(x) \wedge c(x)]$$

obtendríamos en todos los casos el valor verdadero V, es decir, es una tautología. En consecuencia, se puede reemplazar el bicondicional "$\leftrightarrow$" por la equivalencia lógica "$\Leftrightarrow$" y afirmar que las formas proposicionales $[a(x) \vee b(x)] \wedge c(x)$ y $[a(x) \wedge c(x)] \vee [b(x) \wedge c(x)]$ son lógicamente equivalentes. Además teniendo en cuenta las segundas filas de ambas tablas, obtenemos que $x \in [(A \cup B) \cap C] \leftrightarrow x \in [(A \cap C) \cup (B \cap C)]$, es también una tautología, de donde por definición de igualdad entre conjuntos resulta $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Hasta aquí abordamos únicamente la Parte I de este trabajo. En la Parte II desarrollaremos los restantes temas mencionados en el resumen.

BIBLIOGRAFÍA

Bosch, J. (1965), *Introducción al simbolismo lógico*, Buenos Aires, EUDEBA.

Bressan, J. C., Ferrazzi de Bressan, A. E. (1986), *Lógica y conjuntos* (EM 1, M 1), Buenos Aires, SENOC, Asociación para la Promoción de Sistemas Educativos no Convencionales.

Copi, I. M. (1978), *Introducción a la Lógica*, Buenos Aires, EUDEBA.

Gamut, L. T. F. (2002), *Introducción a la Lógica*, Buenos Aires, EUDEBA.

Hamilton, A. G. (1981), *Lógica para Matemáticos*, Madrid, Paraninfo.

Klimovsky, G. y Boido, G. (2005), *Las desventuras del conocimiento matemático, Filosofía de la matemática. Una introducción*, Buenos Aires, a-Z editora.

Nota: En esta Bibliografía se citan además de una publicación de los autores que sigue el enfoque de este trabajo, otras publicaciones que permiten ampliar el tema.

Juan Carlos Bressan
Departamento de Fisicomatemática
Facultad de Farmacia y Bioquímica, UBA
Junín 956 - (1113) Buenos Aires - Argentina
jbressan@mybfyb.ffyb.uba.ar
bressanjuancarlos22@gmail.com