"Heurísticas: un componente del proceso de aprender a demostrar"

Liliana Siñeriz y Cristina Ferraris
Centro Regional Universitario Bariloche. UNComahue
lsineriz@crub.uncoma.edu.ar; cferrari@crub.uncoma.edu.ar

FUNDAMENTACIÓN

Dentro del proyecto "Aprendizaje de la demostración en Geometría"[1], hemos diseñado un modelo teórico que contempla una serie de componentes que intervienen en el proceso de aprender a demostrar: Concepciones; Niveles de razonamiento; Tipos de prueba; Lenguaje; Contenido matemático; Heurística.

En el proyecto de referencia, los datos se obtuvieron a través de dos tests, una entrevista y la observación etnográfica de una clase práctica, trabajando con estudiantes del profesorado de Matemática en el marco de la asignatura Geometría Euclídea.

Con el propósito de indagar acerca del proceso de aprender a demostrar, trabajamos con las producciones de los estudiantes que participaron en la experiencia, las cuales se analizan sobre la base de elementos teóricos de los distintos componentes.

La demostración es el resultado de un proceso que, lejos de ser lineal, involucra todo un quehacer matemático en el que conviven conocimientos previos, intuiciones, observación de regularidades y analogías, etc. Hay todo un trabajo previo de descubrimiento de la prueba formal que implica la elaboración, contrastación y validación de conjeturas.

En este trabajo nos centraremos en el componente "Heurísticas", que atiende a los modos y medios de resolución de problemas que pueden describirse independientemente del contenido concreto del problema y que no suponen garantía de obtener la solución del mismo. Enfocaremos los modos de razonamiento y procedimientos derivados, que no se encuadran en la lógica formal y que, sin embargo, representan un fuerte aporte en la construcción del conocimiento matemático, particularmente en lo que a demostrar se refiere.

Vamos a focalizar a aquellos razonamientos que, si bien no necesariamente llevan a la demostración de una conjetura, inciden en el grado de confianza que otorgamos a la misma; y atenderemos a la estructura de estos razonamientos para interpretar la actuación de los alumnos. Así también, presentaremos las distintas categorías que

[1] Proyecto de Investigación B134, desarrollado en el Centro Regional Universitario Bariloche, aprobado y subsidiado por la Secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue.

hemos establecido respecto al plano heurístico, a fin de hacer un análisis minucioso del proceso de aprendizaje de la demostración.

Para ilustrar estos elementos teóricos presentamos el análisis de algunas producciones en relación a dos actividades que componen el primer test.

DESARROLLO

En la elaboración de los elementos teóricos hemos atendido a las formas de trabajo heurístico, que Polya enfoca desde el razonamiento plausible y que Lakatos hace desde la lógica del descubrimiento matemático. Así también, y teniendo en cuenta que durante el proceso de demostración pueden utilizarse heurísticas de distinta naturaleza, decidimos discriminarlas de acuerdo a las clases de heurísticas presentes en el proceso de resolución, descritas en Siñeriz (2000).

Descripción de los elementos teóricos

. Modos de razonamiento heurístico e inferencias asociadas que requieren validación

Las inferencias producidas en el camino hacia la demostración se establecen mediante razonamientos que no necesariamente siguen los patrones de la lógica formal. En el libro "Matemática y razonamiento plausible" (Polya, 1966) se analiza la estructura de aquellos razonamientos que tienen lugar a la hora de resolver problemas, que se consideran provisionales y viables, los llamados **razonamientos plausibles**, en los cuales no se transmite verdad de las premisas a la conclusión, sino un aumento en la creencia de que la conclusión es verdadera. Los **patrones plausibles** son los que describen la estructura de las operaciones mentales utilizadas en estos razonamientos.

Estas formas de razonamiento heurístico a veces son usadas para probar la validez de un enunciado y se les otorga valor de prueba a las conclusiones obtenidas a partir de ellas.

Presentamos los patrones plausibles establecidos por Polya y, junto a cada uno de ellos, la inferencia asociada.

. *Abducción.* Está asociada al patrón fundamental inductivo (PFI)

$A \Rightarrow B$ es V	$A \Rightarrow B$ es V
B es V	B es V
A es más digna de crédito (PFI)	A es V (abducción)

La abducción consiste en atribuir a todos los elementos de un conjunto una propiedad constatada en uno o algunos elementos de ese conjunto.

. *Sobregeneralización de la no validez.* Asociada al patrón correspondiente al examen de un fundamento posible (EFP).

A $\Leftarrow$ B	A $\Leftarrow$ B
B es F	B es F
A es menos digna de crédito (EFP)	A es F (sobregeneraliz. no validez)

Esta sobregeneralización lleva a razonar de la siguiente manera: comprobada la falsedad de una proposición de la cual se deduce una conjetura, se concluye que la conjetura también es falsa, aunque no necesariamente sea el caso.

. *Analogía no aclarada.* Asociada al patrón fundamental de inferencia plausible (PFIP)

A es análoga a B	A es análoga a B
B es V	B es V
A es más digna de crédito (PFIP)	A es V (analogía no aclarada)

La analogía no aclarada lleva a transferir propiedades de un dominio a otro al observar alguna analogía entre ambos, aunque no necesariamente las propiedades correspondan a la analogía establecida..

. *Ausencia de tercera posibilidad.* Asociada al patrón correspondiente al examen de una conjetura incompatible (ECI).

A es incompatible con B cuando A implica ~B.

A incompatible con B	A incompatible con B
B es F	B es F
A es más digna de crédito (ECI)	A es V (ausencia de tercera posibilidad)

La ausencia de tercera posibilidad, lleva a otorgar verdad a A cuando se ha comprobado la falsedad de B. No obstante, podrían ser ambas falsas (cuando los conjuntos implicados no son complementarios). No se acepta la escala de grises entre el negro y el blanco.

. Clasificación de heurísticas

Las formas de razonar correspondiente a los patrones plausibles conviven con ciertas prácticas o modalidades de actuación, que llamamos **heurísticas**, las cuales allanan el camino hacia la resolución de un problema o la prueba de una propiedad.

Alan Schoenfeld dice que las heurísticas o estrategias heurísticas son reglas para tener éxito en la resolución de problemas, que ayudan a comprender mejor el problema o hacer progresos hacia su solución. Entre ellas incluye dibujar figuras, introducir

notación adecuada, explotar problemas relacionados, reformular problemas arguyendo por contradicción, trabajar hacia atrás, conjeturar y verificar, considerar casos.
Claramente estas heurísticas son de diferente naturaleza, por ende si se quieren analizar los elementos que intervienen en el proceso de demostración con cierto detalle, habrá que diferenciarlas.
Para ello, hemos establecido categorías que atienden a las distintas formas de trabajo heurístico que tienen lugar en el mismo y que también se ponen en juego al aprender a demostrar.
Las cuatro grandes clases de heurísticas que consideramos son: I) **métodos**; II) **herramientas**; III) **sugerencias generales**; IV) **destrezas**.

I) Los **Métodos** llevan a una transformación del problema original de forma standard; proporcionan planes organizados para resolver el problema. Entre ellos consideramos:

. Método de Análisis Síntesis

La caracterización de este método puede encontrarse en el libro XIII de los Elementos de Euclides. Desde la Grecia clásica se ha llamado **"Análisis"** al camino que lleva desde la incógnita a los datos, estableciendo progresivamente sus relaciones mutuas; el camino contrario, que va desde los datos hasta la incógnita es llamado **"Síntesis".**
Los reflejos en la heurística de este método quedan recogidos por sugerencias tales como "trabajar hacia atrás", "dar el problema por resuelto", "hacer la figura de análisis"[2] e, invirtiendo el proceso, "trabajar hacia delante a partir de los datos",

. Métodos de Lakatos como medio para refutar (validar por la negativa)

En el libro "Pruebas y refutaciones" (Lakatos I. 1978), a través de un diálogo imaginario entre un profesor y sus alumnos, se ilustra el funcionamiento de la matemática denominada informal, que se construye a partir de la formulación de conjeturas, que luego se confirman o refutan a través de pruebas y de contraejemplos respectivamente.
Se muestra la función del contraejemplo (utilizado para falsar o refutar) en una conjetura y en la prueba de la misma.
Vamos a rescatar los métodos de trabajo presentados por este autor en procura de la validación:

---

[2] La figura de análisis es un dibujo a mano alzada de la incógnita, donde remarcamos lo dado, y a partir de ella analizamos los objetivos parciales o resultados intermedios que habría que plantearse para determinarla. Dicha figura permite hacer el examen previo de lo que se busca, de forma que a partir del objetivo final, o resultado, se analizan los objetivos parciales, o resultados intermedios, que habría que plantearse para determinarlo. Siñeriz (2000)

Método de la rendición: determina el rechazo de la conjetura pues el contraejemplo da por tierra con ella.

Método de exclusión de monstruos: Se rechaza el contraejemplo por considerarlo no genuino. Se salva la conjetura a partir de una revisión de los conceptos que intervienen en ella, eliminando el contraejemplo como tal.

Método de ajuste de monstruos: Se reinterpreta el contraejemplo y se lo incluye como ejemplo. Parafraseando a Lakatos, solo hay una interpretación monstruosa y no un monstruo. Se mantiene la conjetura.

Método de exclusión de excepciones: Aceptación del contraejemplo, se modifica la conjetura. Se considera al contraejemplo como una excepción, restringiendo el dominio de validez de la conjetura.

Método de incorporación de lemas: Aceptación del contraejemplo. Se modifica la conjetura a partir de la prueba, identificando el lema (explícito o implícito) que es refutado por el contraejemplo e incorporando a la conjetura la condición implícita en el lema. Se mantiene la prueba, reduciendo el dominio de la conjetura al dominio propio del "lema culpable".

II) Las **herramientas heurísticas** hacen referencia a un procedimiento independiente del contenido del problema que lo transforma en otro, permite formular un problema relacionado con el original. Es un instrumento de transformación; no resuelve el problema ni garantiza su solución sino que lo transforma en otro u otros; su nombre se determina en función de la comparación entre el problema original y el transformado. Su manera particular de actuar sobre un problema puede examinarse mediante la comparación de dicho problema con el transformado. Entre ellas, y atendiendo al proceso de demostración, se tienen: la **consideración de un caso**, el **examen de posibilidades**, el **paso al contrarrecíproco**, la **reducción al absurdo** y la **analogía aclarada**.

. Consideración de un caso, que puede adoptar distintas formas. Para caracterizarlas, llamaremos "ejemplo" al elemento utilizado como referente para verificar o demostrar una aserción; está elegido en el conjunto universal donde se considera la validez de una afirmación. La consideración puede referirse a:

caso general, el ejemplo representa a una clase mayor que aquella a la que hace referencia el problema .

caso particular, el ejemplo pertenece a una subclase.

caso genérico, el ejemplo es un representante de la familia a la que pertenece.

caso singular, el ejemplo es un caso cualquiera en el dominio al que hace referencia el problema. Se restringe el tratamiento a un objeto individual.

caso límite o especial, el ejemplo es un caso particular o singular que se encuentra en un extremo del campo de variabilidad.

Alguna de estas formas puede llevar a la "**consideración de una serie de casos"**, la cual es otra versión de esta herramienta que aparece cuando está implícita una sucesión.

. Examen de Posibilidades: Se examinan las diferentes alternativas que pueden presentarse. Se descompone el dominio de objetos a los que se refiere el problema mediante una partición y se resuelve el problema para cada una de las partes; se obtiene un conjunto de problemas P_1, P_2,... P_n donde cada P_i es menos ambicioso que P pero su conjunción es equivalente a P. Puede usarse el resultado o la solución de P_i en P_j.

. Paso al contrarrecíproco: la herramienta consiste en trasformar la implicación original $P \Rightarrow Q$ en la implicación $\sim Q \Rightarrow \sim P$.

. Reducción al Absurdo: la herramienta consiste en trasformar la implicación original $P \Rightarrow Q$ en la implicación $(\sim Q \wedge P) \Rightarrow M \wedge \sim M$

. Analogía aclarada: se examinan objetos que concuerdan en ciertos aspectos que se pueden definir claramente. Los objetos análogos concuerdan en ciertas relaciones entre sus respectivos elementos.

III) Las **sugerencias generales** tienen la función de señalar una dirección de trabajo sin evocar un procedimiento concreto para buscar o producir un problema relacionado. A veces orientan búsquedas en la memoria a largo plazo: establecer diferencias y similitudes con problemas anteriores; reducir el problema a uno resuelto anteriormente. Otras veces llevan a potenciar las posibilidades que brinda el problema: resolver el problema de forma diferente; analizar el resultado.

IV) Las **destrezas** son formas adecuadas de trabajo que sirven para descubrir; son procedimientos de rutina, no tiene el carácter de transformación. En general las destrezas suponen el dominio de cualquier regla o algoritmo establecido que se pueda desarrollar de acuerdo con rutinas. Las clasificamos en:

. Instrumentales: uso de instrumentos de geometría, precisión en los trazados.

. Organizativas: marcar información complementaria en la figura de análisis; hacer una figura para visualizar la información dada o como soporte del razonamiento; hacer una tabla.

.Comunicativas: uso de notación adecuada simbólica y coloquial.

ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE ALUMNOS DE PROFESORADO

Vamos a ilustrar como utilizamos estas elaboraciones teóricas en el análisis de las producciones de los alumnos, en relación a dos actividades (que enunciamos en bastardilla), a través de algunas respuestas de los participantes.

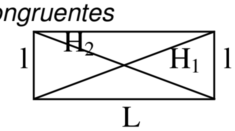
Actividad. Estos tres enunciados están referidos a cuadriláteros. Decir si son verdaderos o falsos, justificando cada respuesta

E1: Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes.

E2: Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un rectángulo.

E3: Si las diagonales de un cuadrilátero no son congruentes, entonces el cuadrilátero no es un rectángulo.

Respuesta a E1:

> *V. Las diagonales de un rectángulo son congruentes pues tiene los pares de lados opuestos congruentes y las diagonales son hipotenusas de triángulos rectángulos congruentes*
>
> 
>
>
> $$\left.\begin{array}{l} |H_1|^2 = |l|^2 + |L|^2 \\ |H_2|^2 = |l|^2 + |L|^2 \end{array}\right\} H_1 \equiv H_2$$

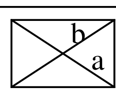
Se ponen de manifiesto destrezas comunicativas, ya que demuestra que el enunciado es verdadero en forma **coloquial y simbólica** usando propiedades del paralelogramo y del triángulo rectángulo. Superpone dos demostraciones. Problemas generados:

A_1.demostrar que los dos triángulos implicados son congruentes (un camino; forma coloquial)

A_2. demostrar que las hipotenusas tienen igual longitud (otro camino; forma simbólica)

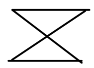
La figura realizada parece ser utilizada como **figura de análisis** y las justificaciones presentadas se derivarían de hacer la **síntesis** correspondiente. La herramienta heurística utilizada es la consideración de un **caso genérico**.

Otra respuesta a E1:

> V
>
> 
>

Se muestra la validez del enunciado mediante un dibujo. La fuerte carga visual de las figuras geométricas (simetrías del rectángulo) hace evidente la propiedad. La herramienta que hemos asociado a este tipo de respuesta es la consideración de un **caso singular**, ya que se restringe el tratamiento a un objeto individual; si bien se dibuja una figura que parece ser genérica no se explicitan propiedades de la misma que llevarían a tomarla como representante de clase.

Respuesta a E2:

> F. je je no siempre.
>
> 
>
> Es un cuadrilátero (cuatro lados) y sus diagonales son congruentes, pero no es rectángulo

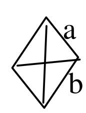
Se refuta mediante un contraejemplo (moño), que por sí mismo basta para “mostrar” la falsedad. El contraejemplo es un “monstruo”, no es acorde a la definición de cuadrilátero; por tanto no tiene posibilidad de ser un ejemplo genuino del concepto cuadrilátero. Desde el análisis que estamos realizando, este procedimiento desembocaría en el **Método de exclusión de monstruos**, aunque este tratamiento no se concreta. Varios alumnos usan el cuadrado como contraejemplo, ya que lo consideran no rectángulo, algunos usan el trapecio para refutar, con lo cual en estas respuestas subyace el **Método de la rendición**.

Respuesta a E3:

> Por contrarecíproco es verdadero e igual que E1.

Uso explícito de la equivalencia entre directo y contrarecíproco. La herramienta utilizada es el **paso al contrarrecíproco** que lleva a trasformar la implicación en juego y argumentar la validez remitiéndose a lo expuesto para E1.

Otra respuesta a E3:

> *Cierto, porque si no son congruentes forma un romboide*
>
> 
>

Uso de lenguaje **coloquial** acompañado de **dibujo**. Argumenta la veracidad de la proposición mediante un **caso particular** de la familia de cuadriláteros que tienen diagonales no congruentes, el romboide. Subyace el patrón plausible **“Verificación de Consecuencias”** el cual desemboca en un **razonamiento abductivo**.

Inferencias implícitas: Las diagonales de un cuadrilátero no son congruentes $\Rightarrow$ el cuadrilátero es un romboide.

Actividad. Definición: Se llama mediatriz de un segmento a la recta perpendicular al mismo por el punto medio.

Estas tres propiedades están relacionadas con la mediatriz de un segmento:

P1: Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo.

P2: Las mediatrices de los lados de un triángulo tienen un punto en común.

P3: Todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia.

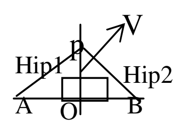
a) Demostrar P1.

b) Justifica la siguiente afirmación: "P2 es verdadera".

c) A partir de P1 y P2 demostrar P3.

Respuesta a item a)

d(p,o) =V $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ pues o está en el punto medio de $\overline{AB}$.



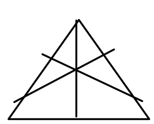
$|\text{Hip 1}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |OP|^2$

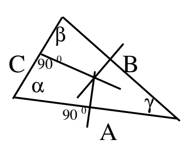
$|\text{Hip 2}|^2 = |\overline{OB}|^2 + |OP|^2$ Como $\overline{OA} = \overline{OB}$ ➔ $|\text{Hip 1}|^2 = |\text{Hip 2}|^2$

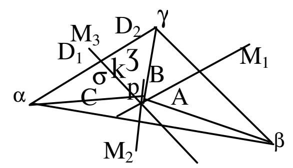
➔ $|\text{Hip 1}| = |\text{Hip 2}|$. La distancia de P a los extremos de $\overline{AB}$ es la misma para ambos.

Se detectan ciertas destrezas tales como el uso de la **figura como soporte de razonamiento** y de lenguaje **simbólico**. Se demuestra la propiedad para el punto medio del segmento y para otro punto arbitrario, por tanto la herramienta utilizada es el **Examen de posibilidades**. Problema generado a raíz de esta segunda alternativa: B1. demostrar que las hipotenusas de los triángulos implicados son congruentes

Respuesta a item b)







El ángulo entre MA y MC es 180-α

MB ~ MA = 180-α

MB ~ MC es 180-β

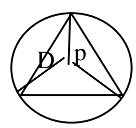
$M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ porque no son paralelas

$\exists p \in M_1 \cap M_2$ A≡C y A≡B por P_1 B≡ C por transitividad $D_1 \equiv D_2$. Puedo construir una k perpendicular a αγ que pase por p /σ ≡ Ʒ que cumple con las propiedades de la mediatriz, pues pasa por el punto medio del lado αγ define dos triángulos rectángulos con hipotenusas congruentes y pasa por el punto medio de αγ por criterio de semejanza de triángulos para determinar la bisectriz del ángulo llano debe ser mas rigurosa la demostración pero "no entra en el margen"

Argumentación lógica, con algunas afirmaciones sin justificar y mucho contenido matemático implícito. La argumentación se hace en forma **coloquial y simbólica**, se evidencian destrezas comunicativas si bien hay ciertas imprecisiones en cuanto a la simbología utilizada (rectas se nombran indistintamente con mayúscula y minúscula, los puntos en letra griega o latina)**.** Uso de la **figura de análisis** como punto de partida, a lo cual sigue una resolución de naturaleza sintética, basada en el **trabajo hacia delante**. El plan consiste en demostrar que dos mediatrices se cortan en un punto p y luego demostrar que la recta perpendicular al tercer lado y que pasa por p es mediatriz de dicho lado. Se considera un **caso genérico** y se trabaja con una cadena de implicaciones que intentan llevar a cabo el plan.

Respuesta a item c)

Como las mediatrices se cortan en un punto y las distancias desde ese punto a cada vértice son las mismas se puede centrar el compás en P y trazar una circunferencia de radio D que pase por los tres vértices.



Aparecen destrezas organizativas y comunicativas. Hay un uso de la **figura como soporte de razonamiento** y se argumenta en forma **coloquial** sobre la base de incisos anteriores, haciendo referencia a acciones (con el compás) para hacer la construcción efectiva.

COMENTARIOS FINALES

Hemos querido poner el acento en aquellas formas de trabajo que ayudan a progresar en el camino hacia la demostración.

Por un lado, consideramos los razonamientos heurísticos, que a menudo subyacen de forma viciada en las decisiones y respuestas de los alumnos, quienes consideran verdaderas a las conjeturas o a las conclusiones obtenidas a partir de ellos, obviando hacer la validación correspondiente

Por otro, discriminamos las heurísticas en cuatro grandes bloques; esta clasificación, nos ha permitido indagar en detalle los aspectos heurísticos implicados en el proceso de aprendizaje de la demostración en Geometría, de alumnos del Profesorado de Matemática.

Estas elaboraciones teóricas pretenden brindar nuevos elementos para el análisis del proceso de aprender a demostrar. Esperamos también que sirvan para instalar la reflexión docente sobre los aspectos heurísticos tratados, y para evaluar sus implicancias didácticas y en la formación del profesorado.

BIBLIOGRAFÍA

Lakatos, I. (1978): *Pruebas y refutaciones*. Alianza Ed.: Madrid, (orig. published 1976)

Lakatos, I. (1981): El método de análisis y síntesis, en *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*. Vol.2 Alianza Ed: Madrid. (orig. published 1978)

Polya, G. (1965): *Cómo plantear y resolver problemas*, Ed. Trillas, México, (orig. published 1945)

Polya, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid, (orig. published 1954)

Polya, G. (1962-1965): *Mathematical Discovery*, 2 vols. (John Wiley and Sons, New York).

Schoenfeld, A.H. (1985): *Mathematical problem solving*. (Academic Press: Orlando, FL).

Siñeriz L. (1994): Métodos y Heurísticas de Resolución de Problemas. *Cuaderno Universitario nº 22,* Centro Regional Universitario Bariloche. UNComahue. Secretaría de Investigación y Extensión. CRUB . UNC. ISSN 0325-6308.

Siñeriz L. (2000): *La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

Siñeriz L. y Ferraris C. (2007): *Razonamiento plausible y dialéctica de pruebas y refutaciones.* Memorias del IX Simposio de Educación Matemática. (CD) Chivilcoy, Buenos Aires. Argentina. ISBN: 978 - 987-20239-5-9.