TÍTULO: Introducción a la geometría riemanniana			
AÑO: 2021	**CUATRIMESTRE:** 2°	**N° DE CRÉDITOS:**	**VIGENCIA:** 3 años
CARGA HORARIA: 60 horas de teoría y 60 horas de práctica			
CARRERA/S: Doctorado en Matemática			

FUNDAMENTOS

La Geometría Riemanniana estudia espacios de dimensión finita en los que existen nociones de continuidad, suavidad y distancia, con una cierta compatibilidad entre ellas. Se desprenden los conceptos de geodésica (cuya trayectoria es el camino más corto entre dos elementos suficientemente cercanos) y curvatura (que mide en qué medida el espacio no es métricamente euclídeo). Estos espacios son importantes en la modelización de situaciones que pueden describirse local, pero no globalmente, de manera paramétrica.

OBJETIVOS

El objetivo es que el alumno llegue a manejar con soltura los contenidos, de tal manera que le permitan resolver problemas relacionados. Además, que conozca las demostraciones rigurosas de los enunciados que constituyen el núcleo de la teoría (y que tome conciencia de la necesidad de las hipótesis correspondientes).

Como es el caso para toda materia del área Matemática, se intenta que el estudiante desarrolle capacidades para:

• Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad para enunciar proposiciones, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.

• Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.

• Abstraer las propiedades estructurales (de objetos matemáticos, de la realidad observada, y de otros ámbitos) distinguiéndolas de aquellas puramente ocasionales y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos.

• Comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conocimientos, procedimientos, resultados e ideas matemáticas, y hacerlo de manera rigurosa y concisa.

PROGRAMA

Unidad I: Variedades riemannianas

Estructuras riemanniana y pseudo-riemanniana – Conexiones afines - Derivada covariante - Transporte paralelo - Geodésicas -Conexión de Levi-Civita - Aplicación exponencial - Propiedades minimizantes de las geodésicas – Entornos normales.

Unidad II: El teorema de Hopf-Rinow

Distancia riemanniana - Métricas riemannianas completas - Teorema de Hopf-Rinow.

Unidad III: La curvatura

Tensor de curvatura - Identidades de Bianchi - Curvaturas seccional, de Ricci y escalar - Expresión para el tensor de curvatura en el caso de curvatura seccional constante - Teorema de Schur.

Unidad IV: Inmersiones isométricas

Segunda forma fundamental y operador de forma - La curvatura media - Teorema de Gauss

- Subvariedades totalmente geodésicas obtenidas mediante puntos fijos de isometrías.

Unidad V: Campos Killing y campos de Jacobi
Campos de Killing - Campos de Jacobi - Campos de Jacobi en espacios de curvatura constante - Puntos conjugados y su relación con puntos críticos de la aplicación exponencial.

Unidad VI: El espacio hiperbólico
Diferentes modelos - Isometrías, geodésicas y subvariedades distinguidas.

Unidad VII: Teorema de Hadamard
Espacios de cubrimiento - Teorema de Hadamard.

Unidad VIII: Variedades homogéneas
Grupos de Lie - Variedades homogéneas - Submersiones riemannianas - Métricas normales - Geodésicas de métricas normales - La grassmanniana y sus geodésicas.

PRÁCTICAS

Las clases de teoría serán en general expositivas, y en ellas se desarrollarán los contenidos de la asignatura, con justificaciones rigurosas en la mayoría de los casos. Ejemplos bien escogidos ayudarán a la comprensión y utilidad de las definiciones y propiedades probadas.
Las clases prácticas consistirán en la resolución de problemas, con la guía del docente. Se proporcionará una colección de ejercicios adecuados a los contenidos y nivel de exigencia del curso. Una parte de las clases prácticas se dedicará a comentarios informales.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA:
- M. do Carmo, Riemannian geometry, Birkhauser.
- M. J. Druetta, Notas de geometría riemanniana básica, Trabajos de Matemática, Serie B, 1/87, FaMAF.
- J. M. Lee, Riemannian maniflolds. An introduction to curvature, Graduate texts in Mathemctics, Springer, 1997.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA
- J. Jost, Riemannian geometry and geometric analysis (Universitext), Springer.
- S. Gallot, D. Hulin y J. Lafontaine, Riemannian geometry (Universitext), Springer.
- W. Kühnel, Differential geometry: Curves, surfaces, manifolds, Student Mathematical Library, Vol. 16, A.M.S.
- P. Petersen, Riemannian geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer.
- Spivak, Michael. A comprehensive introduction to differential geometry. Publish or Perish, 1979.

MODALIDAD DE EVALUACIÓN

A mediados y al final del curso se darán respectivas listas de problemas prácticos. Para alcanzar la regularidad, las/los estudiantes deberán resolverlos de manera correcta (al menos la mitad de ellos), en el término de 10 días. Está permitido consultar al docente sobre los ejercicios. Las/los estudiantes de posgrado redactarán y expondrán un escrito corto (dos o tres página) sobre un tema puntual de la materia.
El día del examen final la/el estudiante responde de manera escrita preguntas sobre temas de

la teoría y además entrega las soluciones de problemas prácticos que se le habrán hecho llegar con una semana de antelación. Está permitido consultar al docente sobre los ejercicios.

REQUERIMIENTOS PARA EL CURSADO
Variedades diferenciables: espacio tangente, subvariedades, campos vectoriales, curvas integrales, corchete de Lie. Los temas del curso generalizan la geometría de las curvas y las superficies en el espacio euclídeo de dimensión tres. No es necesario conocerla con anterioridad, pero sí muy conveniente.