PRÁCTICO NÚMERO 2 DE ÁLGEBRA II Y ÁLGEBRA-2010

1. a) Para cada una de las MERFs siguientes, asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema. Luego asumir que es la matriz ampliada de un sistema NO homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Probar que si un sistema homogéneo, $Ax = 0$, posee soluciones distinta de la trivial, entonces el sistema $Ax = b$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + b + c + d = k$.

Probar que si $k = 0, 1$ o 2 entonces solo hay dos MERFs con esas condiciones, y que en los otros casos hay una sola.

3. Calcular cuantas MERFs 2×2 y 3×3 hay con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$. (p primo).

4. En cada caso, caracterizar mediante ecuaciones el conjunto de los (b_1, b_2, b_3) para los cuales el sistema dado tenga solución. En aquellos casos en los que haya al menos un $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$, dar dos de ellos. (asumimos que trabajamos en $\mathbb{R}$).

$$a) \begin{cases} 2x - z = b_1 \\ x - 2y + z = b_2 \\ 3x - 2y = b_3 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x - z = b_1 \\ x - 2y + z = b_2 \\ x - 2y = b_3 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} x + 2y - z = b_1 \\ 2x + y + z = b_2 \\ x - y + 2z = b_3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y + 3z = b_1 \\ 4x + 5y + 6z = b_2 \\ 7x + 8y + 9z = b_3 \end{cases} \qquad e) \begin{cases} x + y + z = b_1 \\ 3x + 5y + z = b_2 \\ 2x + 3y + z = b_3 \end{cases} \qquad f) \begin{cases} x - y + 2z + w = b_1 \\ 2x + 2y + z - w = b_2 \\ 3x + y + 3z = b_3 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x - y + 3z + 2w = b_1 \\ -x + 2y - z + 2w = b_2 \\ x + 5z + 2w = b_3 \end{cases} \qquad h) \begin{cases} x - y + 3z + 2w = b_1 \\ -x + 2y - z + 2w = b_2 \\ x + 5z + 6w = b_3 \end{cases}$$

5. Calcular para qué valores de a el siguiente sistema tiene solución única, para cuales valores es incompatible y para cuales es un sistema indeterminado.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ ax - y + z = 2 \\ 2x - 2y + (2 - a)z = 4a \end{cases}$$

(Este ejercicio parece como el anterior pero es mas díficil).

6. Ahora trabajamos en $\mathbb{Z}_2$. Sea:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema $HX = 0$?
b) Dar TODAS* las soluciones del sistema $AX = 0$, donde A esta formada por las primeras 5 columnas de H junto con las 2 últimas columnas. (es decir, A es 4×7). (*son 8)
(NOTA INFORMATIVA, pero no necesaria para resolver el ejercicio: Los códigos de corrección de errores se usan para el envío de palabras que puedan soportar algún tipo de errores de transmisión o almacenamiento y aún así se puedan detectar los errores y corregirlos. Son muy usados en el comercio electrónico y en cosas tales como CDs y los satélites enviados a otros planetas. Un código es simplemente un conjunto de palabras, o n-uplas, bien elegido. Por motivos más avanzados de los que podemos exponer acá, el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo (sobre $\mathbb{Z}_2$) es una buena elección para un código de corrección de errores, siempre que la matriz se elija bien. Unos códigos muy usados son los códigos de Hamming y uno de ellos es el que consiste en el conjunto de soluciones de la parte a))

7. Considere el sistema $AX = 0$ donde A es una matriz tal que al reducirla por fila se llega a la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Supongamos que estamos trabajando en $\mathbb{Z}_5$. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema $AX = 0$? Dar dos soluciones no nulas.

8. Probar que $(A + B)C = AC + BC$, para todas matrices A, B $r \times n$ y C $n \times q$.

9. Realizar los productos AB, BA, AC, CA, BC, CB, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA (*), donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(*) sabemos que no los van a hacer a todos. Hagan algunos ahora, y dejen otros para practicar para el parcial y el final.

10. a) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$. Repetir el ejercicio anterior con aquellos productos que tengan sentido. (parte del ejercicio es decir cuales productos tienen sentido y cuales no).

b) Repetir para $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

11. Dada una matriz cuadrada $n \times n$ A, se define la traza de A como $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Si A es $n \times r$ y B es $r \times n$ entonces AB y BA son matrices cuadradas. (una $n \times n$, la otra $r \times r$). Probar que $tr(AB) = tr(BA)$. Verificar esto para algunos de los productos hechos arriba.

12. A pesar del ejercicio anterior dar ejemplos de matrices A, B, C (basta con usar todas matrices 2×2) tales que $tr(ABC) \neq tr(BAC)$.

13. Hallar dos matrices distintas A tales que $A^2 = 0$ pero $A \neq 0$. **No tiene permitido preguntarle a los ayudantes sobre este ejercicio y ellos no responderán.** Tampoco deberia preguntarle a otro de sus compañeros, aunque esto no lo podemos controlar.

14. Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar: (Ayuda: VITs)

a) rango$(A) = n$, rango$(B) = m \Rightarrow$rango$(AB) = m$.

b) rango$(AB) = m \Rightarrow$rango$(B) = m$.

c) rango$(A) = r$, rango$(B) = n \Rightarrow$rango$(AB) = r$.

d) rango$(AB) = r \Rightarrow$rango$(A) = r$.

e) Probar que si $m > n$ entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no nulas.

f) Probar que si $r > n$ entonces existe un b $r \times 1$ tal que $ABX = b$ no tiene solución.

15. Para cada una (*) de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para decidir si son inversibles y hallar la inversa en caso de que lo sean.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & i \end{bmatrix}$$

(*) otra vez, suponemos que no lo van a hacer para todas. Hagan algunos ahora y otros dejenlos para repasar para el parcial o el final.

16. Sea A la primera matriz del ejercicio anterior.

Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$. Repetir para alguna otra matriz invertible del ejercicio anterior.

17. Sea A la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Probar que A es invertible cuando se la mira en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ pero que no lo es cuando se la mira en $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$

18. Sean A $r \times n$ y B $n \times r$, con $r > n$.

a) Probar que AB no es invertible. (Ayuda: ejercicio **14**)

b) Dar un ejemplo con esas condiciones tal que BA sea invertible.

19. Probar que si e es una OEF, y $E = e(I)$, entonces $e(A) = EA$ para toda matriz A. (Nota: en el teórico se probó esto para un tipo de OEF. Probarlo para las dos restantes).

20. Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño: Probar que:

$(A \sim I,\ B \sim I) \Rightarrow AB \sim I$. (este ejercicio es trivial si leyó el teórico).

21. Sea A una matriz $n \times n$ sobre los reales, y sea I la identidad $n \times n$. Una matriz se dice nilpotente si existe un $m \geq 1$ tal que $A^m = 0$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $A - I$ es invertible.