Algebra II y Algebra-2010

En cada fecha de examen de DICIEMBRE-FEBRERO-MARZO el examen tendrá 10 puntos de parte práctica y 10 de parte teórica, y las partes se promediarán para la nota final, siempre que se apruebe cada parte por separado. En la parte teórica se tomarán tres ejercicios. Al menos DOS de esos ejercicios seran de la siguiente lista. PUEDEN TOMARSE OTROS TEOREMAS QUE NO ESTEN EN LA LISTA. Si se toman dos de esta lista y uno no de esta lista, los dos de esta lista sumarán 8 puntos de los 10 del teórico entre los dos. Si se toman los tres de esta lista, obvio que sumarán 10 puntos. La lista esta separada en dos partes. Se garantiza que habrá al menos uno de la parte A y que valdrá al menos 4 puntos.

Parte A

I : Demostrar el teorema de unicidad de la MERF (es decir, probar que si $A \sim M$, $A \sim R$, y M, R son MERFs, entonces $M = R$)

II : Probar el VIT! (el sistema homogeneo $AX = 0$ tiene sólo la solucíon nula si y solo si el rango de A es igual al numero de COLUMNAS de A).

III : Probar el VIT$\exists$. (Si A es $r \times n$, los sistemas no homogeneos asociados $AX = b$ tienen solucion para todo b $r \times 1$ si y solo si el rango de A es igual al numero de FILAS de A).

IV : Probar el teorema de la dimensionalidad: si V esta generado por un conjunto finito de vectores, entonces existe un número d (llamado la dimensión de V) tal que toda base de V tiene d elementos, todo conjunto LI de V tiene $\leq d$ elementos, y todo conjunto generador de V tiene $\geq d$ elementos. (Puede usar sin probarlo el lema de que si un EV V tiene la propiedad de que todo conjunto LI tiene a lo sumo n elementos, entonces V tiene una base con a lo sumo n elementos).

V : Probar el teorema del rango-nulidad: Si $T : V \mapsto W$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales, y $\dim V = n$, entonces $\dim \mathrm{Nu}T + \dim \mathrm{Im}T = n$.

VI : Demostrar que si V, W, Z son espacios vectoriales de dimension finita, $\mathcal{B}_1$ es base de V, $\mathcal{B}_2$ es base de W, $\mathcal{B}_3$ es base de Z y $T : V \mapsto W$ y $L : W \mapsto Z$ son tranformaciones lineales entonces:

1) $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}[\alpha]_{\mathcal{B}_1}$ para todo $\alpha \in V$.

2) Si B es una matriz tal que $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}_2} = B[\alpha]_{\mathcal{B}_1}$ $\forall \alpha \in V$, entonces $B = [T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

3) $[L \circ T]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_1} = [L]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$

VII : Demostrar que si A y B son matrices $n \times n$ sobre un cuerpo, entonces:

1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

2) A es inversible si y solo si $\det A \neq 0$

VIII : Probar que autovectores no nulos correspondientes a autovalores distintos son LI, es decir, probar que si $T : V \mapsto V$ es una transformación lineal, $\lambda_1, ..., \lambda_r$ son autovalores distintos de T, y α_i es autovector no nulo asociado a λ_i, entonces $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ es LI.

IX : Demostrar que si W es un subespacio vectorial de dimension finita de un espacio vectorial V con producto interno, entonces:

1) $V = W \oplus W^{\perp}$.

2) Si $\alpha \in V$, y β es la proyección ortogonal de α en W, entonces β es la mejor aproximación a α por vectores de W, i.e., si $\gamma \in W$ entonces $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma)$.

Parte B

X : Probar el VIT^{-1}. (en realidad, como es largo, lo mas probable es que solo pidamos que prueben una parte del mismo).

XI : Sea V un espacio vectorial que tiene la propiedad de que todo conjunto LI tiene a lo sumo n elementos. Probar que V tiene una base con a lo sumo n elementos.
(NO PUEDE USAR el teorema de la dimensionalidad, pues este es un lema para aquel).

XII : Demostrar que Rango-fila=Rango-columna=Rango, donde Rango de una matriz es el numero de pivotes de la unica MERF a la cual es equivalente, Rango-fila es la dimension del espacio fila de la matriz, y Rango-columna es la dimension del espacio columna de la matriz.

XIII : Sea A una matriz $n \times n$. Demostrar:

1) Si A tiene una fila nula, entonces $\det(A) = 0$.
2) Si e es una OEF de tipo II, entonces det $e(A)$ =det$A$.
3) Si e es una OEF de tipo III, entonces det $e(A) = -$det$A$.

(puede usar sin necesidad de probarlo que el determinante es multilineal y alternado).

XIV : Probar que si A es $n \times n$ entonces $det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{i,j}det(A(i|j))\ \forall i$

XV : Probar que si A es $n \times n$ entonces $A(\mathrm{Adj}(A)) = (\mathrm{Adj}(A))A =\det(A)I$.

XVI : Demostrar el siguiente Teorema: Sea $T : V \mapsto V$ una transformación lineal con dim$V = n$, sean $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sus autovalores distintos, y sea d_i =dim Nu$(T - c_iI)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) T es diagonalizable.
2) El polinomio caracteristico de T puede escribirse como $p(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}...(x-\lambda_r)^{d_r}$
3) $d_1 + \cdots + d_r = n$

XVII : Enunciar y demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Extras

Cuando sólo tome 2 ejercicios de la lista de arriba, el tercer ejercicio tendrá un 50% de posibilidades de ser uno de los siguientes:

XVIII : Si W es SEV de un espacio de dimensión finita V, probar que dim $W \leq$dim V.

XIX : Probar que si $T : V \mapsto W$ es lineal, y dim V =dim W es finita, entonces T es isomorfismo si y solo si T es no singular si y solo si T es suryectiva.

XX : Sea $T : V \mapsto V$ transformación lineal, V de dimensión finita, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de V. Probar que $[T]_{\mathcal{B}_1}$ y $[T]_{\mathcal{B}_2}$ son matrices semejantes.

XXI : Sea $T : V \mapsto W$ transformación lineal, $\mathcal{B}_1$ base de V y $\mathcal{B}_2$ base de W, y $\mathcal{B}_1^*$, $\mathcal{B}_2^*$ sus bases duales. Probar que $[T^t]_{\mathcal{B}_2^*,\mathcal{B}_1^*} = [T]^t_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$

XXII : Enunciar y probar la regla de Cramer.

XXIII : Probar la desigualdad triangular. (puede usar Cauchy-Schwartz sin necesidad de probarla).