Práctico 7

Parte I

En esta primera parte, cada vez que tengamos que hallar una derivada, es necesario usar la definición y no las reglas usuales y/o tablas.

1. (a) Demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$ para $a \neq 0$.
(b) Demostrar que la recta tangente a la gráfica de f en $(a, 1/a)$ no corta la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$.
(c) Demostrar que si $g(x) = 1/x^2$, entonces $g'(a) = -2/a^3$ para $a \neq 0$.
(d) Demostrar que la tangente a la gráfica de g en $(a, 1/a^2)$ corta a la gráfica de g en otro punto.
(e) Demostrar que si $h(x) = \sqrt{x}$, entonces $h'(a) = a^{-1/2}/2$ para $a > 0$.
(f) Hallar $\mathrm{d}[x]/\mathrm{d}x$.

2. Sea f una función derivable en el intervalo abierto (a, b) y $c \in \mathbb{R}$. En cada caso hallar g' en su respectivo dominio.

(a) $g(x) = f(x) + c$. (b) $g(x) = cf(x)$. (c) $g(x) = f(x + c)$.
(d) $g(x) = f(cx)$. (e) $g(x) = f(x)^2$.

3. (a) Sea $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Mostrar que f es derivable en 0.
(b) Sea f una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Demostrar que f es derivable en 0.
(c) Probar que la función f definida por $f(0) = 0$ y $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$, es derivable en todo $\mathbb{R}$. Dar f' y probar que no es continua en 0.

4. Sea f una función derivable en a. Demostrar:

(a) $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. (b) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$.

Parte II

A partir de ahora sí pueden usar las reglas usuales y/o tablas de derivadas, aunque es posible que algunas veces no sea suficiente y tengan que volver a usar la definición.

5. Calcular f' en cada uno de los siguientes casos.

(a) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - \pi x$. (b) $f(x) = (x^3 + 3)(2x^2 - 1)$. (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.
(d) $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^8$. (e) $f(x) = x^2 \cos(e^x)$. (f) $f(x) = \tan(x)$.
(g) $f(x) = \ln(4x)$. (h) $f(x) = \cos(x \operatorname{sen}(x))$. (i) $f(x) = \cos(\sqrt{x^4 + 7})$.
(j) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{\operatorname{sen}(3x)}}{1 - x + x^5}$. (k) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^7(x))}{x}$. (l) $f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$.
(m) $f(x) = 2^x - \log_3(x^{-\frac{1}{2}})$. (n) $f(x) = \ln(e^x(x + 1)^2)$. (ñ) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

6. Calcular $f^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si:

(a) $f(x) = x^{10}$. (b) $f(x) = \cos(x)$. (c) $f(x) = 1/x$. (d) $f(z) = \sqrt{z}$. (e) $f(t) = \dfrac{1}{1 - t^2}$.

7. Encontrar un polinomio P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ y $P''(2) = 2$.

8. En cada uno de los siguientes casos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto (x_0, y_0) indicado.

(a) $\begin{cases} y = 1 - 2x - 3x^2, \\ (x_0, y_0) = (-2, -7). \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ (x_0, y_0) = (1, 1). \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y = \frac{x}{1-x}, \\ (x_0, y_0) = (0, 0). \end{cases}$

9. Decidir en que puntos es derivable la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 & \text{si } |x| < 1, \\ 2x+1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 7 - x & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

10. Supongamos que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0. Demostrar que f es derivable en 0, y hallar $f'(0)$ en términos de g.

11. Supongamos que f es derivable en 0, y que $f(0) = 0$. Demostrar que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0.

12. Diga si es verdadero o falso, y justifique.

(a) Si $f + g$ es derivable en a, entonces f y g son derivables en a.
(b) Si fg es derivable en a, no necesariamente f y g son derivables en a.
(c) Si f es derivable en a y $f(a) \neq 0$, entonces $|f|$ es derivable en a.
(d) Si f y g son derivables en a, entonces $f \circ g$ es derivable en a.
(e) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que no es derivable en una cantidad infinita de puntos.
(f) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que es derivable en 0 y no lo es en cualquier intervalo abierto que contiene al 0.
(g) Supongamos $a < b$. Toda función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), se extiende a una función derivable en todo $\mathbb{R}$.

13. Considerar la función biyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6 - x - x^3$. Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $(-4, 2)$.

14. Determinar en los siguientes casos $(f^{-1})'(d)$.

(a) $f(x) = x^5 + 2, \quad d = 1.$
(b) $f(x) = \sqrt{4 - x}, \quad d = 3.$
(c) $f(x) = \tan(2x), \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad d = 1.$

15. Encontrar f' para:

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x).$ (b) $f(x) = \arccos(x).$ (c) $f(x) = \arctan(x).$