PRÁCTICO 8

1. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si existen, máximos y mínimos, relativos y absolutos, en el conjunto A.

(a) $f(x) = x^3 + x$, $A = [-1, 2]$. (b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, $A = [-2, 2]$.

(c) $f(x) = 2 - |x + 1|$, $A = (-2, 1]$. (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $A = (-1, 1)$.

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$, $A = \mathbb{R}$. (f) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$, $A = [0, \frac{7\pi}{15}]$.

2. Para cada uno de las siguientes funciones verifique el teorema del valor medio, encontrando explícitamente el valor de c.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 2]$. (b) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x + 1}$ en $[2, 9]$.

3. Sea $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$. Demostrar que no hay un valor c tal que

$$f(2) - f(0) = 2f'(c).$$

¿Contradice esto el teorema del valor medio?

4. Pruebe que $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |a - b|$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Concluya que $\operatorname{sen}(x) < x$, si $x > 0$.

5. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en todo punto.

(a) Suponga que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

(b) Demuestre que no se cumple lo enunciado en (a) si no se supone $f(a) = g(a)$.

(c) Demuestre que $e^x > 1 + x$ cuando $x > 0$.

6. Suponga que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y $f(1) = 0$. Demuestre que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y > 0$.

7. ¿Para qué valores de a y b la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ tiene un valor máximo local cuando $x = -3$ y un mínimo local cuando $x = -1$?

8. Determinar los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$. (b) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$. (c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$. (d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) x^{-3}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} \sqrt{x}}$. (f) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$. (g) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$. (h) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2 - x}{x^3 - 1}$.

9. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores máximos y/o mínimos, los intervalos de concavidad, y las abscisas de puntos de inflexión de las siguientes funciones y graficar.

(a) $f(x) = x^{2/3}$. (b) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$. (c) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$.

(d) $f(x) = xe^{-x}$. (e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x + 5}}$. (f) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)}$.

10. Grafique las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{3 + x^2}$. (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$. (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 5}$.

(d) $f(x) = x^2 e^{-x}$. (e) $f(x) = x \ln x$.

11. Sea f una función n-veces derivable en todo $\mathbb{R}$, tal que $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{n+1}) = 0$ para $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$. Demuestre que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(x) = 0$.

12. (a) Determinar los pares de números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo.

(b) Demostrar que entre todos los rectángulos que tienen determinado perímetro, el cuadrado tiene área máxima.

(c) Encontrar las dimensiones de un triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio r.

13. Trace la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones en cada ejercicio.

(a) $f'(-1) = 0$; f no es derivable en $x = 1$; y $f'(x) < 0$ para $|x| < 1$.

(b) $f'(x) > 0$ para $|x| > 1$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < 0$; y $f''(x) > 0$ si $x > 0$.