Nos habia quedado en clase probar la desigualdad triangular. Para ello enunciamos primero una igualdad muy sencilla de mostrar.

Lema: Si $a \in R$, entonces $|-a| = |a|$.

Demostración: Si $a > 0$ entonces $-a < 0$ y por lo tanto, $|a| = a = -(-a) = |-a|$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$ con lo cual $|a| = -a = |-a|$. Si $a = 0$, entonces $a = -a$ y por lo tanto $|a| = |-a|$.

A continuación el resultado que queríamos mostrar.

Teorema: Si $a, b \in R$, entonces $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Demostración: Para mostrar esa desigualdad necesitamos analizar varios casos que permiten concluir la tesis del teorema.

a) Supongamos que $a = 0$ o $b = 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a = 0$. Entonces $|a + b| = |0 + b| = |0| + |b| = |a| + |b|$. Razonamiento totalmente idéntico para $b = 0$.

b) Supongamos ahora que $a > 0$ y $b > 0$. Entonces se cumple que $|a| = a, |b| = b, a + b > 0$ y $|a + b| = a + b$. Por lo tanto $|a + b| = |a| + |b|$.

c) Supongamos ahora que $a < 0$ y $b > 0$. Pueden ocurrir tres casos por ley de tricotomia:

(c1) $a + b = 0$, con lo cual $|a + b| = 0$. Como $|a| > 0$, $|b| > 0$ entonces $|a + b| = 0 = 0 + 0 < |a| + |b|$.

(c2) $a + b > 0$ con lo cual $|a + b| = a + b < 0 + b < |a| + b = |a| + |b|$.

(c3) $a + b < 0$ con lo cual $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + (-b) < |a| + 0 < |a| + |b|$.

Por lo tanto vemos que se cumple en cualquiera de las situaciones la desigualdad deseada.

d) Supongamos ahora que $a > 0$ y $b < 0$. Entonces $-a < 0$ y $-b > 0$. Podemos aplicar el resultado ya probado en el caso c) y decir $|(-a) + (-b)| < |-a| + |-b|$. Por el lema hecho al principio resulta que $|a + b| < |a| + |b|$.

e) Supongamos ahora que $a < 0$ y $b < 0$. Entonces $-a > 0$ y $-b > 0$. Podemos aplicar el resultado ya probado en el caso b) y decir $|(-a) + (-b)| = |-a| + |-b|$. Por el lema hecho al principio resulta que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Juntando las situaciones analizados de a) hasta e) surge la desigualdad deseada $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Vamos a caracterizar a continuación cuando ocurre la igualdad en la desigualdad vista. En realidad es muy simple desde el análisis de los casos considerados.

Lema: Si $a, b \in R$, entonces ocurre la igualdad $|a + b| = |a| + |b|$ si y sólo si se cumplen alguna de estas tres situaciones: (i) a y b son simultáneamente positivos; (ii) a y b son simultáneamente negativos o (iii) alguno de los dos numeros a o b es igual a 0.

Demostración: Veamos ($\Rightarrow$). Entonces suponemos que ocurre la igualdad $|a + b| = |a| + |b|$. Supongamos por el absurdo que no se cumplen ninguna de las situaciones (i), (ii) o (iii). Esto quiere decir que $a < 0$ y $b > 0$ o $a > 0$ y $b < 0$. Pero vimos en el análisis de los casos c) y d) de la demostración del teorema que $a < 0$ y $b > 0$ o $a > 0$ y $b < 0$ implicaban la desigualdad estricta $|a + b| < |a| + |b|$ y eso contradice nuestra suposición de igualdad. Por lo tanto, tiene que cumplirse alguna de las tres situaciones (i), (ii) o (iii).

Veamos ahora ($\Longleftarrow$). Si vale alguna de las suposiciones (i), (ii) o (iii) entonces el análisis hecho en los casos a), b) o e) permite concluir la igualdad $|a + b| = |a| + |b|$.

Nos había quedado también el siguiente resultado muy útil:

Lema: Sea $b \geq 0, a \in R$. Entonces

(i) $|a| \leq b$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$,

(ii) $|a| > b$ si y sólo si $a > b$ o $a < -b$.

Demostración: (ii) surge de (i) aplicando que $p \Longleftrightarrow q$ es equivalente a $-p \Longleftrightarrow -q$. Veamos (i). Si $b = 0$, entonces $a = 0$ y se cumple el resultado trivialmente. Sea entonces $b > 0$. Analizamos dos situaciones que pueden darse, $a \geq 0$ o $a < 0$. Entonces

a) $|a| \leq b$ y $a \geq 0$ si y sólo si $0 \leq a \leq b$, o

b) $|a| \leq b$ y $a < 0$ si y sólo si $0 < -a \leq b$ si y sólo si $0 > a \geq -b$.

Juntando las dos situaciones a) y b) resulta la afirmación que queriamos demostrar.

Nota: En forma totalmente similar puede probarse que, si $b \geq 0, a \in R$ entonces

(i) $|a| < b$ si y sólo si $-b < a < b$,

(ii) $|a| \geq b$ si y sólo si $a \geq b$ o $a \leq -b$.