Análisis Funcional I – 2012

Práctico 1

(1) Si $\{x_n\}$ es una sucesión en un espacio de Banach $\mathcal{X}$: Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

(2) (a) ℓ^2 tiene dimensión infinita.
(b) ℓ^2 es separable.
(c) $\{x \in \ell^2 : ||x||_2 = 1\}$, es cerrado pero no compacto.
(d) $\{x \in \ell^2 : x_i = 0,$ salvo un número finito de i's$\}$ es denso.

(3) Definimos

$$\ell^p = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : ||x||_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$
$$\ell^\infty = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : ||x||_\infty = \sup_i |x_i| < \infty\}.$$

(a) Probar que ℓ^1 y ℓ^∞ son de Banach con las normas $||\,||_1$ y $||\,||_\infty$ respectivamente, pero ℓ^1 no es de Banach con la norma $||\,||_\infty$. (O sea ℓ^1 no es subespacio cerrado de ℓ^∞).
(b) ℓ^1 es subespacio vectorial denso (propio) de ℓ^2. (Por lo tanto no es completo con la $||\,||_2$).
(c) La clausura de ℓ^1 y ℓ^2 en ℓ^∞ es $C_0 = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \lim_{i\to\infty} |x_i| = 0\}$. Por lo tanto C_0 es de Banach con la $||\,||_\infty$ y

$$\ell^1 \subsetneqq \ell^2 \subsetneqq C_0 \subsetneqq C = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \exists \lim_{i\to\infty} x_i\} \subsetneqq \ell^\infty$$

¿ Es C cerrado en ℓ^∞ ?.
(d) Probar que $||x||_q \le ||x||_p$ para todo $x \in \ell^p$ para todo $1 \le p \le q \le \infty$ (Primero suponer que $||\,||_p = 1$).

(4) (a) Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con un producto interno $(\cdot,\cdot)$. Definimos $||x|| = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$. Probar que $||\cdot||$ es una norma.
(b) En todo pre-Hilbert vale la "regla del paralelogramo"
$(x,y) = \frac{1}{4}\{||x+y||^2 - ||x-y||^2\}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$(x,y) = \frac{1}{4}\{||x+y||^2 - ||x-y||^2 \; + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Nota: *El producto escalar se rescata a partir de la norma y está determinado por sus valores en la diagonal o sea por* $(x,x) = ||x||^2$.

(c) Las $||\,||_1$ y $||\,||_\infty$ no cumplen con la regla del paralelogramo y por lo tanto ℓ^1 y ℓ^∞ no son de Hilbert. Pero ℓ^1 es pre-Hilbert con la $||\,||_2$. ¿ Son ℓ^1, C, o C_0 pre-Hilbert con la $||\,||_\infty$?

(5) (a) Probar que $(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$ es un producto escalar y notar que $(f,f)^{\frac{1}{2}} = ||f||_2$.
(b) $||f+g|| = ||f|| + ||g||$, donde $||\,||$ viene dada de un producto escalar, si y sólo si $f = \alpha g$ o $g = \alpha f$ para algún $\alpha \ge 0$. Deducir que $||\,||_1$ y $||\,||_\infty$ no vienen dadas por ningún producto escalar.
(c) Consideramos (X,μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) < \infty$. Probar que $L^q(d\mu) \subset L^p(d\mu)$ y que $||f||_p \le \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||f||_q$, si $1 \le p \le q \le \infty$.
(d) Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, probar que

$$||f||_1 \le \mu(X)^{\frac{1}{p'}}||f||_p \le \mu(X)||f||_\infty$$

y $||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||f||_p$
(e) Si $r \le p \le s$ entonces $L^p(X) \subset L^r(X) + L^s(X)$, donde el conjunto de la derecha es $\{f + g : f \in L^r(X) \text{ y } g \in L^s(X)\}$

(f) La $|| \, ||_p$ cumple la regla del paralelogramo si y sólo si $p = 2$. Luego $|| \, ||_2$ es la única que viene de un producto escalar.

(6) Si $f_n \to f$ en $L^p(X)$ para $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f_n \to f$ en medida.

(7) Sea $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, $0 \leq \alpha < \infty$
(a) Si $X = [0, 1]$ con la medida de Lebesgue, ¿Para que valores de α, $f_\alpha \in L^p(X)$?
(b) Si $X = [1, \infty)$ con la medida de Lebesgue, ¿Para que valores de α, $f_\alpha \in L^p(X)$?

(8) (a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$$

esta en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es continua.
(b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p$.