

Análisis Funcional I – 2012

Práctico 3

- (1) (a) Un normado $\mathfrak{N}$ es completo si y sólo si la condición $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ implica que existe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k x_n$ ($x_n \in \mathfrak{N}$)
 (b) Sea $\mathfrak{N}$ es completo. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente (es decir no depende del orden). No vale la recíproca.
- (2) Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$ espacios de normados y $\mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) = \{A : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M} : A \text{ es lineal y continua}\}$.
 (a) Probar que $\mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ es un espacio normado con $\|A\| = \sup_{x: \|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x: \|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{x: \|x\|=1} \|Ax\|$.
 (b) Probar que $\mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ es de Banach si $\mathfrak{M}$ lo es.
- (3) Las inclusiones $i : \ell^1 \rightarrow \ell^2$ e $i : \ell^2 \rightarrow \ell^\infty$ son continuas.
- (4) (a) Si $\mathfrak{N}_p$ es el espacio $C[a, b]$ con la $\|\cdot\|_p$ y si definimos el operador $A(f) = f(a)$ para toda f en $C[a, b]$, probar que $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{N}_p, \mathbb{K})$ si y sólo si $p = \infty$.
 (b) Id: $L^\infty[a, b] \rightarrow L^2[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ son continuas. (Hallar sus normas).
 Id: $L^1[a, b] \rightarrow L^2[a, b] \rightarrow L^\infty[a, b]$ son discontinuas.
 (c) Buscar sucesiones $\{f_n\} \subset C[a, b]$ tal que $f_n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in [a, b]$ pero $\|f_n\|_1 \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y otra $\{f_n\}$ tal que $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$ pero $\sup_n |f_n(x)| = \infty$ para todo $x \in [a, b]$.
- (5) (a) Probar que el si $1 < p < \infty$ entonces $(\ell^p)' = \ell^{p'}$. ($p + p' = pp'$).
 (b) Probar que si $0 < p < 1$ entonces $(\ell^p)' = \ell^\infty$
 (c) Probar que $(\ell^1)' = \ell^\infty$.
 (d) Probar que $(C_0)' = \ell^1$. ¿ C' ?
- (6) (a) Sea $\mathfrak{N}$ normado. Probar que la bola unidad (abierta o cerrada) es convexa.
 (b) Consideremos $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$. Si $1 < p < \infty$ la bola unidad es estrictamente convexa (Ayuda: probar que existen f y g en L^p tales que $\|f\| = 1$ y $\|g\| = 1$ tal que $\|\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g\| < 1$). Esto es falso para $p = 1$ o $p = \infty$.
- (7) (a) El Teorema de Banach-Steinhaus no vale cuando $\mathfrak{N}$ no es completo. Considerar

$$\mathfrak{N} = \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty, x_i = 0 \text{ salvo un número finito de } i\text{'s}\}.$$
 $\mathfrak{N}$ es un normado con la $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$.
 Sea $A_n(x) = nx_n$. Probar
 (i) $A_n \in \mathfrak{N}' = \mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathbb{K})$.
 (ii) $\sup_n |A_n(x)| < \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \rightarrow \infty$ (verificarlo con $\|\cdot\|_1$).
- (8) Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$ espacios de Banach. Sea $A : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$ lineal que satisface cada vez que $x_n \rightarrow 0$ en $\mathfrak{N}$ y $Ax_n \rightarrow y$ en $\mathfrak{M}$ entonces $y = 0$. Probar que A es continua.
- (9) (a) Si S es un subespacio vectorial cerrado de $\mathfrak{N}$, entonces $\mathfrak{N}/S$ es normado con

$$\|x + S\| = \inf_{y \in S} \|x + y\|.$$
 Además si $\mathfrak{N}$ es de Banach entonces $\mathfrak{N}/S$ es de Banach.
 (b) Probar que para todo $x \notin S$ existe $F \in \mathfrak{N}'$ tal que $F(x) \neq 0 = F(y)$ para todo $y \in S$.
- (10) (a) Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$, espacios de Banach. Probar que $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ es inyectiva y $A(\mathfrak{N})$ es cerrado si y sólo si existe k tal que $\|x\| \leq k\|Ax\|$.
 (b) Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$, espacios de Banach. Probar que $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ tiene imagen $A(\mathfrak{N})$ cerrada si y sólo si existe k tal que para todo $y \in A(\mathfrak{N})$ existe $x \in \mathfrak{N}$ con $Ax = y$ y $\|x\| \leq k\|y\|$.

- (11) Sean $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3$, espacios de Banach, y sean $A_i : \mathfrak{N}_i \rightarrow \mathfrak{N}_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$ operadores lineales tales que
- (a) $A_0, A_2, A_2 A_1 A_0$, son continuas,
 - (b) A_0 es sobre,
 - (c) A_2 es inyectiva.
- Probar que A_1 es continua.
- (12) Probar que si $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$, son espacios de Banach, el conjunto
- $$\{A \in B(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) : A \text{ es inyectivo y } A(\mathfrak{N}) \text{ es cerrado}\}$$
- es abierto en $B(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$.
- (13) Sea $\mathfrak{N}$ un espacio normado.
- (a) Probar que para todo $x \neq 0$ en $\mathfrak{N}$ existe $F \in \mathfrak{N}'$ tal que $\|F\| = 1$ y $F(x) = \|x\|$.
 - (b) $\mathfrak{N}'$ separa puntos en $\mathfrak{N}$, es decir si $\forall x_1 \neq x_2$ existe $F \in \mathfrak{N}'$ tal que $F(x_1) \neq F(x_2)$.
 - (c) Probar que para todo $x \in \mathfrak{N}$ existe $\tilde{x} : \mathfrak{N}' \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $\tilde{x}(F) = F(x)$ lineal y continua, es decir $\tilde{x} \in (\mathfrak{N}')' \doteq \mathfrak{N}'' \doteq$ el bidual de $\mathfrak{N}$. Probar que la aplicación $x \rightarrow \tilde{x}$ es lineal e isométrica.
- (14) Probar que $L^2[0, 1]$ es de primera categoría en $L^1[0, 1]$ usando el Teorema de la aplicación abierta.