Análisis Funcional I – 2012

Práctico 5

`Definición`: *Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, es espacio de Banach con un producto xy (de $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$) tal que para todo x, y, z en $\mathcal{A}$ y α en el cuerpo $\mathbb{K}$ vale*

(1) $(xy)z = x(yz)$.
(2) $x(y + z) = xy + xz$.
(3) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.
(4) $||xy|| \leq ||x||||y||$.

Observación: el inciso (4) implica la continuidad del producto. (Probarlo)

`Definición`: *$A : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ es morfismo de álgebras de Banach si para todo x, $y \in \mathcal{A}_1$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene*

(1) $A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y)$
(2) $A(xy) = A(x)A(y)$
(3) $||A(x)|| \leq C||x||$.

Observación: Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ tienen identidad para el producto entonces $A(e_{\mathcal{A}_1}) = e_{\mathcal{A}_2}$ y si existieran los inversos $A(x^{-1}) = A(x)^{-1}$. (Probarlo)

(1) (a) Probar que ℓ^∞ es un álgebra de Banach con la suma usual y el producto $x.y = \{x_i y_i\}_{i=1}^\infty$.
(b) Probar que $(\ell^\infty, .)$ tiene identidad.
(c) Probar que $L^1(T)$ es un álgebra de Banach con la suma usual de funciones y el producto dada por la convolución.
(d) Probar que $\widehat{\quad} : L^1(T) \to \ell^\infty$ es morfismo de álgebras de Banach.
(e) Probar que $(L^1(T), *)$ no tiene identidad.

(2) (a) Sea $f \in L^1(T)$ Probar que la aplicación $t \to L_t f \doteq f(t + x)$ de $\mathbb{R}$ en $L^1(T)$, es continua.
(b) Probar que si $\{K_n\}$ es una aproximación de la identidad, entonces $f * K_n \to_{n\to\infty} f$ en el $L^1(T)$.
(c) Probar que $\widehat{\quad} : L^1(T) \to \ell^\infty$ es inyectiva.

(3) (a) Probar que que si $f \in C^k(T)$ entonces $\widehat{f^k}(n) = i^k n^k \widehat{f}(n)$.
(b) $\widehat{L_h f}(n) = \widehat{f}(n)e^{inh}$.
(c) $\widehat{e^{ik\cdot} f}(n) = \widehat{f}(n - k)$.

(4) Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy,$$

(a) Probar que $f * g \in L^1$.
(b) Probar que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.
(c) Probar que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(d) Probar que $\widehat{\cdot}$ es continua de $L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$.

(5) (a) Probar que el si $1 < p < \infty$ entonces $(\ell^p)' = \ell^{p'}$. $(p + p' = pp')$.
(b) Probar que $(\ell^1)' = \ell^\infty$.
(c) Probar que $(C_0)' = \ell^1$.

(6) Sabemos que $f \to \widehat{f}$ de $L^1(S^1) \to C_0$ es lineal, continua e inyectiva. Probar que no es sobre.