Análisis Funcional I – 2012

Práctico 6

(1) (a) Si A una matriz en $B(\mathbb{C}^n)$ tal que $(A)_{ij} = \alpha_{ij}$, entonces A^* es la matriz tal que $(A^*)_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}$. ($\mathbb{C}^n$ el espacio de Hilbert con $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$).
(b) Sea $A(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. Probar que $A \in B(\ell^2)$ y $A^*(x) = (x_2, x_3, \cdots)$. Comprobar que $A^*A = I \neq AA^*$.

(2) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. P es proyección ortogonal sobre S si y sólo si $P^* = P = P^2$.

(3) Sea $A(f) = x^2 f(x)$ definido de $L^2[0,1]$ en $L^2[0,1]$.
(a) Probar que A lineal, continuo y autoadjunto.
(b) Probar que A q es inyectivo y no sobre.
(c) Probar que el conjunto $\{\lambda : (A - \lambda I) \text{ no es inversible.}\} = [0, 1]$

(4) Probar que $\mathcal{B}_{00}(\ell^2) \subsetneq \mathcal{B}_0(\ell^2) \subsetneq \mathcal{B}(\ell^2)$

(5) Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números complejos. Probar que existe un operador compacto T que tiene a $\{\lambda_n\}$ como autovalores si y sólo si $\lambda_n \to 0$.

(6) Sea

$$(Tf)(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f(t)dt \qquad (0 < s < 1)$$

definido para $f \in L^2(0, 1)$.
(a) Probar que $T \in \mathcal{B}(L^2(0, 1))$.
(b) Probar que $\phi_n(t) = t^n$ son autovectores con autovalores $\frac{1}{n+1}$.
(c) Probar que T no es compacto ni simétrico.
(d) ¿Se contradice el ejercicio anterior?

(7) Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida, y $K(x, y) \in L^2(X \times X, \Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$. Sea $Tf(x) = \int_X K(x, y) f(y) dy$.
(a) Si $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, entonces T es autoadjunto.
(b) Si $\{\lambda_n\}$ son los autovalores de T repetidos según su multiplicidad probar $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$.

(8) Sea

$$K(s, t) = \begin{cases} (1 - s)t, & \text{si } 0 \leq t \leq s, \\ (1 - t)s, & \text{si } s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y sea $T(f)(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t) dt$, para $s \in [0, 1]$.
(a) Probar que $T \in \mathcal{B}(L^2[0, 1])$.
(b) Probar que los autovalores de T son $(n\pi)^2$, que los autovectores correspondientes son $\operatorname{sen}(n\pi x)$ y que los autoespacios tienen dimensión 1. (Ayuda: Si $\lambda \neq 0$, la ecuación $Tf = \lambda f$ implica que f es infinitamente diferenciable, que f satisface la ecuación $\lambda f'' + f = 0$ y que $f(0) = f(1) = 0$. El caso $\lambda = 0$ puede ser tratado en forma independiente.)
(c) Probar que los autovectores encontrados en (b) forman una base ortonormal de $L^2[0, 1]$.
(d) Probar que T es un operador compacto en $C[0, 1]$.