

Análisis Funcional I – 2013

Práctico 1

- (1) Si $\{x_n\}$ es una sucesión en un espacio de Banach \mathcal{X} : Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
- (2) (a) ℓ^2 tiene dimensión infinita.
 (b) ℓ^2 es separable.
 (c) $\{x \in \ell^2 : \|x\|_2 = 1\}$, es cerrado pero no compacto.
 (d) $\{x \in \ell^2 : x_i = 0, \text{ salvo un número finito de } i\text{'s}\}$ es denso.

(3) Definimos

$$\ell^p = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

$$\ell^{\infty} = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \|x\|_{\infty} = \sup_i |x_i| < \infty\}.$$

- (a) Probar que ℓ^1 y ℓ^{∞} son de Banach con las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_{\infty}$ respectivamente, pero ℓ^1 no es de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\infty}$. (O sea ℓ^1 no es subespacio cerrado de ℓ^{∞}).
 (b) ℓ^1 es subespacio vectorial denso (propio) de ℓ^2 . (Por lo tanto no es completo con la $\|\cdot\|_2$).
 (c) La clausura de ℓ^1 y ℓ^2 en ℓ^{∞} es $C_0 = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \lim_{i \rightarrow \infty} |x_i| = 0\}$. Por lo tanto C_0 es de Banach con la $\|\cdot\|_{\infty}$ y

$$\ell^1 \subsetneq \ell^2 \subsetneq C_0 \subsetneq C = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \exists \lim_{i \rightarrow \infty} x_i\} \subsetneq \ell^{\infty}$$

i Es C cerrado en ℓ^{∞} ?.

- (d) Probar que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ para todo $x \in \ell^p$ para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$ (Primero suponer que $\|x\|_p = 1$) Por lo tanto $\ell^p \subset \ell^q$ para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
- (4) (a) Sea \mathcal{H} un espacio vectorial sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} con un producto interno (\cdot, \cdot) . Definimos $\|x\| = (\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$. Probar que $\|\cdot\|$ es una norma.
 (b) En todo PH vale la “regla del paralelogramo” $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x + y\|^2$ y además vale
 $(x, y) = \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
 $(x, y) = \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Nota: El producto escalar se rescata a partir de la norma y está determinado por sus valores en la diagonal o sea por $(x, x) = \|x\|^2$.

- (c) Las $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_{\infty}$ no cumplen con la regla del paralelogramo y por lo tanto ℓ^1 y ℓ^{∞} no son de Hilbert. Pero ℓ^1 es pre-Hilbert con la $\|\cdot\|_2$. i Son ℓ^1 , C , o C_0 pre-Hilbert con la $\|\cdot\|_{\infty}$?
- (5) (a) Probar que $(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)} dx$ es un producto escalar y notar que $(f, f)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$.
 (b) $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$, donde $\|\cdot\|$ viene dada de un producto escalar, si y sólo si $f = \alpha g$ o $g = \alpha f$ para algún $\alpha \geq 0$. Deducir que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_{\infty}$ no vienen dadas por ningún producto escalar.
 (c) Consideramos (X, μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) < \infty$. Probar que $L^q(d\mu) \subset L^p(d\mu)$ y que $\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$, si $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
 (d) Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, probar que

$$\|f\|_1 \leq \mu(X)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \leq \mu(X) \|f\|_{\infty}$$

y $\|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$

- (e) Si $r \leq p \leq s$ entonces $L^p(X) \subset L^r(X) + L^s(X)$, donde el conjunto de la derecha es $\{f + g : f \in L^r(X) \text{ y } g \in L^s(X)\}$

(f) La $\|\cdot\|_p$ cumple la regla del paralelogramo si y sólo si $p = 2$. Luego $\|\cdot\|_2$ es la única que viene de un producto escalar.

(6) Si $f_n \rightarrow f$ en $L^p(X)$ para $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

(7) Sea $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, $0 \leq \alpha < \infty$

(a) Si $X = [0, 1]$ con la medida de Lebesgue, ¿Para que valores de α , $f_\alpha \in L^p(X)$?

(b) Si $X = [1, \infty)$ con la medida de Lebesgue, ¿Para que valores de α , $f_\alpha \in L^p(X)$?

(8) (a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

esta en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es continua.

(b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.