

Análisis Funcional I – 2013

Práctico 2

Ejercicios Preliminares (Del 1) al 6))

- (1) Sea X un EVT T_1 , y sea $\mathcal{U}$ una base de entornos del $0 \in X$. Probar que $\{0\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.
- (2) Probar que si S es balanceado, su cápsula convexa S_c es balanceada. Deducir que en un EVTLC, los entornos del $0 \in X$ balanceados y convexos (y absorbentes por ser entornos del origen) forman base de entornos.
- (3) Sea $X = l_1(\mathbb{N})$, y sea $p_i(x) = |x_i|$, $i \in \mathbb{N}$. Probar que $\{p_i\}$ es una familia de seminormas que determinan sobre X una topología localmente convexa. Determinar los entornos del cero. Esta topología es equivalente a la generada por la $\|\cdot\|_1$?
- (4) Dar ejemplo de un EVTLC no metrizable y de un EVT metrizable no LC.
- (5) Sea Ω un abierto no vacío del plano complejo, y sea $H(\Omega)$ el subespacio de $C(\Omega)$ (con la topología definida en el teórico) de funciones holomorfas (analíticas) en Ω . Probar que $H(\Omega)$ es de Fréchet.
- (6) Probar que un EVT es normable si y solo si el origen admite un entorno S convexo y acotado. Ayuda: usar la funcional de Minkowski de S .
- (7) Sea $C = C[0, 1] = \{f[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ continuas}\}$. Definimos

$$d(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx.$$

Sea (C, σ) el espacio C con la topología inducida por esta métrica y (C, τ) el espacio C con la topología de las seminormas

$$p_x(f) = |f(x)|, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Probar que todo conjunto τ -acotado también es σ -acotado y por lo tanto la $id : (C, \tau) \rightarrow (C, \sigma)$ manda conjuntos acotados en conjuntos acotados.
 - (b) Probar que $id : (C, \tau) \rightarrow (C, \sigma)$ no es continua, a pesar que es sucesionalmente continua, (por el teorema de la convergencia dominada), y por lo tanto (C, τ) no es metrizable. Probar también que (C, τ) no tiene base local numerable.
 - (c) Probar que toda funcional lineal en (C, τ) es de la forma $f \rightarrow \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$, para alguna elección de puntos $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ y algunos $c_i \in \mathbb{C}$.
 - (d) Probar que los únicos abiertos convexos de (C, σ) son $\emptyset$ y C .
 - (e) $id : (C, \sigma) \rightarrow (C, \tau)$, no es continua.
- (8) Sean $\{X, \mathcal{P}\}$ y $\{Y, \mathcal{Q}\}$ dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos (EVTLC), generados por las familias de seminormas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ respectivamente. Sea $A : X \rightarrow Y$ lineal. A es continua si y sólo si, para todo $q \in \mathcal{Q}$ existen $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ y $M > 0$ tales que
- $$q(A(x)) \leq M[p_1(x) + \dots + p_n(x)]$$
- para todo $x \in X$.
- (9) Sean $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n -uplas de enteros mayores o iguales a cero, y $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ y $p_{\alpha, \beta} f = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta| |D^\alpha f(x)|$.
- Sea
- $$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : p_{\alpha, \beta} f < \infty \forall \alpha, \beta\}.$$
- (a) Probar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Fréchet.
 - (b) Probar que $f \rightarrow x^\alpha f$, $f \rightarrow D^\alpha f$ y $f \rightarrow gf$ son continuas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donde $g \in \mathcal{S}$.
- (10) Probar que las siguientes funcionales están en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

- (a) $\delta_a f = f(a)$.
- (b) $L_g(f) = \int fg$ donde $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $1 \leq p \leq \infty$.

(11) Probar que las siguientes funcionales están en $(C^\infty)'(\mathbb{R}^n)$:

- (a) $\delta_a f = f(a)$.
- (b) $L_g(f) = \int fg$ donde $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, soporte de g es compacto y $1 \leq p \leq \infty$,