Análisis Funcional I – 2013

Práctico 4

(1) `Definición`: *Sea G un abierto en $\mathbb{C}$, denotamos por $L_a^2(G)$ el conjunto de todas las funciones analíticas en G tal que*

$$\int\int_G |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty.$$

$L_a^2(G)$ Se llama el espacio de Bergman para G.

Observar que $L_a^2(G) \subset L^2(\mu)$ donde μ es la medida de lebesgue restringida a G. Esto implica que $L_a^2(G)$ tiene un producto interno (y norma) natural heredado de $L^2(\mu)$.

(a) Si f es analítica en un entorno de $\overline{B}(a,r)$ entonces

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int\int_{B(a,r)} f.$$

(b) Si $f \in L_a^2(G)$, $a \in G$ y $0 < r < \text{dist}(a, \partial G)$, entonces

$$|f(a)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}}||f||_2$$

(c) Probar que $L_a^2(G)$ es un espacio de Hilbert.

(2) Sea S subespacio vectorial del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.
(a) S es denso si y sólo si $S^\perp = 0$.
(b) $\overline{S} = S^{\perp\perp}$.

(3) Sea $\mathcal{P}$ un pre-Hilbert. Si $S \subset \mathcal{P}$ entonces
(a) $S \subset (S^\perp)^\perp \doteq S^{\perp\perp}$. (b) $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp = (\overline{S})^\perp$. (c) $S \cap S^\perp \subset \{0\}$. (d) $\mathcal{P}^\perp = \{0\}$ y $\{0\}^\perp = \mathcal{P}$.
(e) Si $S_1 \subset S_2$ entonces $S_2^\perp \subset S_1^\perp$.

(4) Sea $\mathcal{P}$ pre-Hilbert, probar que $\mathcal{P}$ separable si y sólo si existe $\{\varphi_i\}$ base numerable.

(5) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión infinita entonces toda base algebraica es no numerable.

(6) Sea $\mathcal{P}$ un espacio pre-Hilbertiano. Dar un ejemplo de $F \in \mathcal{P}'$, tal que F no esta generado por ninguna g en $\mathcal{P}$.

(7) Un espacio pre-Hilbert $\mathcal{P}$ es completo si, y sólo si, para toda $F \in \mathcal{P}'$ existe un $y \in \mathcal{P}$ tal que $F(x) = (x, y)$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

(8) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y φ sesquilineal en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, entonces son equivalentes
(a) φ acotada. (b) φ continua en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. (c) φ continua en $(0,0)$.

(9) Consideremos el espacio $C[0,1]$, con la norma $||\,||_\infty$. Sea $S = \left\{ f \in L^\infty : \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f = 1 \right\}$. Probar que S es convexo y cerrado y que no existe una f en S con distancia mínima al cero.

(10) Consideremos $C[0,1]$ con la $||\,||_1$. Sea $S = \left\{ f \in L^1 : \int_0^1 f = 1 \right\}$. Probar que S es convexo y cerrado y que existen infinitas f con distancia mínima al cero.

(11) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales sobre S_1 y S_2 respectivamente. Probar

(a) $P_1 P_2 = 0 \iff P_2 P_1 = 0 \iff < S_1, S_2 >= 0 \implies S_1 \oplus S_2$ es subespacio cerrado y $P_1 + P_2$ es proyección ortogonal sobre él. Observación: en el caso en que $P_1 P_2 = 0$ se dice que son ortogonales.

(b) $P_1 P_2 = P_2 P_1 \implies P_1 P_2$ es proyección ortogonal sobre $S_1 \cap S_2$.

(c) Dar un ejemplo en que $P_1 P_2 \neq P_2 P_1$

(12) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales sobre S_1 y S_2 respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $P_1 P_2 = P_1$.

(b) $P_2 P_1 = P_1$.

(c) $||P_1 x|| \leq ||P_2 x||$.

(d) $S_1 \subset S_2$

(e) $< P_1 x, x > \leq < P_2 x, x > \quad \forall x \in \mathcal{H}$.