

Análisis Funcional I – 2013

Práctico 5

Definición: Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, es espacio de Banach con un producto xy (de $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$) tal que para todo x, y, z en $\mathcal{A}$ y α en el cuerpo $\mathbb{K}$ vale

- (1) $(xy)z = x(yz)$.
- (2) $x(y + z) = xy + xz$.
- (3) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.
- (4) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Observación: el inciso (4) implica la continuidad del producto. (Probarlo)

Definición: $A : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ es morfismo de álgebras de Banach si para todo $x, y \in \mathcal{A}_1$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene

- (1) $A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y)$
- (2) $A(xy) = A(x)A(y)$
- (3) $\|A(x)\| \leq C\|x\|$.

Observación: Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ tienen identidad para el producto entonces $A(e_{\mathcal{A}_1}) = e_{\mathcal{A}_2}$ y si existieran los inversos $A(x^{-1}) = A(x)^{-1}$. (Probarlo)

- (1)
 - (a) Probar que ℓ^∞ es un álgebra de Banach con la suma usual y el producto $x.y = \{x_i y_i\}_{i=1}^\infty$.
 - (b) Probar que $(\ell^\infty, .)$ tiene identidad.
 - (c) Probar que $L^1(T)$ es un álgebra de Banach con la suma usual de funciones y el producto dada por la convolución.
 - (d) Probar que $\widehat{\cdot} : L^1(T) \rightarrow \ell^\infty$ es morfismo de álgebras de Banach.
 - (e) Probar que $(L^1(T), *)$ no tiene identidad.
- (2)
 - (a) Sea $f \in L^1(T)$ Probar que la aplicación $t \rightarrow L_t f \doteq f(t+x)$ de $\mathbb{R}$ en $L^1(T)$, es continua.
 - (b) Probar que si $\{K_n\}$ es una aproximación de la identidad, entonces $f * K_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f$ en el $L^1(T)$.
- (3)
 - (a) Probar que si $f \in C^k(T)$ entonces $\widehat{f^k}(n) = i^k n^k \widehat{f}(n)$.
 - (b) $\widehat{L_h f}(n) = \widehat{f}(n) e^{inh}$.
 - (c) $\widehat{e^{ik\cdot} f}(n) = \widehat{f}(n - k)$.
- (4) Sean f y g en $L^1(T)$, F_n el núcleo de Fejer. Probar
 - (a) $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$.
 - (b) Si P_N es un polinomio trigonométrico de grado N entonces $\widehat{P_N}(n) = 0$ para todo $n > N$ y $n < -N$.
 - (c) $\widehat{f * F_N}(n) = 0$ para todo $n > N$ y $n < -N$.
- (5) Probar que $f \rightarrow \{\widehat{f}(n)\}$ es un morfismo de álgebras de Banach, uno a uno y NO sobre de $L^1(T)$ en $C_0(\mathbb{Z})$.