

Análisis Funcional I – 2013

Práctico 6

- (1) (a) Si A una matriz en $B(\mathbb{C}^n)$ tal que $(A)_{ij} = \alpha_{ij}$, entonces A^* es la matriz tal que $(A^*)_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. ($\mathbb{C}^n$ el espacio de Hilbert con $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$).
- (b) Sea $A(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Probar que $A \in B(\ell^2)$ y $A^*(x) = (x_2, x_3, \dots)$. Comprobar que $A^*A = I \neq AA^*$.
- (2) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. P es proyección ortogonal sobre S si y sólo si $P^* = P = P^2$.
- (3) Sea $A(f) = x^2 f(x)$ definido de $L^2[0, 1]$ en $L^2[0, 1]$.
- (a) Probar que A lineal, continuo y autoadjunto.
- (b) Probar que A que es inyectivo y no sobre.
- (c) Probar que el conjunto $\{\lambda : (A - \lambda I) \text{ no es inversible.}\} = [0, 1]$
- (4) Probar que $\mathcal{K}_0(\ell^2) \subsetneq \mathcal{K}(\ell^2) \subsetneq \mathcal{B}(\ell^2)$
- (5) (a) Si $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ entonces $\overline{Im(A)}$ separable.
- (b) Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ simétrico y tal que $Nu(A) = \{0\}$ entonces $\mathcal{H}$ separable.
- (c) Si $\mathcal{H}$ separable y $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$.
- (i) Probar que existe $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $A(e_n) = \lambda_n e_n$, donde $\{e_n\}$ es base ON de $\mathcal{H}$.
- (ii) Probar que para A del inciso anterior, $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\lambda_n \rightarrow 0$.
- (6) Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida, y $K(x, y) \in L^2(X \times X, \Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$. Sea $Tf(x) = \int_X K(x, y)f(y)dy$.
- (a) Si $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, entonces T es autoadjunto.
- (b) Si $\{\lambda_n\}$ son los autovalores de T repetidos según su multiplicidad probar $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$.
- (7) Sea

$$K(s, t) = \begin{cases} (1-s)t, & \text{si } 0 \leq t \leq s, \\ (1-t)s, & \text{si } s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y sea $T(f)(s) = \int_0^1 K(s, t)f(t)dt$, para $s \in [0, 1]$.

- (a) Probar que $T \in \mathcal{B}(L^2[0, 1])$.
- (b) Probar que los autovalores de T son $(n\pi)^2$, que los autovectores correspondientes son $\sin(n\pi x)$ y que los autoespacios tienen dimensión 1. (Ayuda: Si $\lambda \neq 0$, la ecuación $Tf = \lambda f$ implica que f es infinitamente diferenciable, que f satisface la ecuación $\lambda f'' + f = 0$ y que $f(0) = f(1) = 0$. El caso $\lambda = 0$ puede ser tratado en forma independiente.)
- (c) Probar que los autovectores encontrados en (b) forman una base ortonormal de $L^2[0, 1]$.
- (d) Probar que T es un operador compacto en $C[0, 1]$.
- (8) Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ normal.
- (a) Probar $\|A\| = \sup_{n \geq 1} \{|\lambda_n|\}$
- (b) Probar $\lambda_n \rightarrow 0$.
- (c) Probar que $A = \bigoplus_{n \geq 1} \lambda_n P_n$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(9) Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

- (a) Probar que $f * g \in L^1$.
- (b) Probar que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.
- (c) Probar que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- (d) Probar que $\widehat{\cdot}$ es continua de $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$.

(10) Sabemos que $f \rightarrow \widehat{f}$ de $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0$ es lineal, continua e inyectiva. Probar que no es sobre.