Análisis Funcional I – 2011

Práctico 1

(1) (a) En todo espacio vectorial existe una norma.
(b) Toda norma $|| \ ||$ en un espacio vectorial es mayor o igual a 0.
(c) Si $\mathfrak{N}$ es un normado entonces,

$$| \, ||x|| - ||y|| \, | \leq ||x - y||$$

y

$$||x_1 + x_2 + \cdots + x_n|| \leq ||x_1|| + ||x_2|| + \cdots + ||x_n||.$$

(2) Sea S un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado $\mathfrak{N}$ entonces $\overset{\circ}{S} = \emptyset$.

(3) Sea S subespacio vectorial de un normado $\mathfrak{N}$.
(a) $\overline{S}$ es subespacio vectorial.
(b) S es completo entonces S es cerrado.
(c) S es cerrado y $\mathfrak{N}$ es completo entonces S es completo.

(4) En la desigualdad de Schwartz vale la igualdad si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $x = \alpha y$ o $x = \alpha x$.

(5) En todo pre-Hilbert se tiene
$(x, y) = \frac{1}{4}\{||x + y||^2 - ||x - y||^2\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$(x, y) = \frac{1}{4}\{||x + y||^2 - ||x - y||^2 \ + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Nota: *El producto escalar se rescata a partir de la norma y está determinado por sus valores en la diagonal osea por* $(x, x) = ||x||^2$.

(6) Sea $d(x, y) = ||x - y||$ (donde $|| \ ||$ es norma en un espacio vectorial). Probar que

$$\overline{B}(x_0, r) = \overline{\{x : d(x, x_0) < r\}} = \{x : d(x, x_0) \leq r\}.$$

(7) Si $\{h_n\}$ es una sucesión en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} ||h_n|| < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ converge.

(8) (a) ℓ^2 Tiene dimensión infinita.
(b) ℓ^2 es separable.
(c) $\{x \in \ell^2 : ||x||_2 = 1\}$, es cerrado pero no compacto.
(d) $\{x \in \ell^2 : x_i = 0, \text{ salvo un número finito de i's}\}$ es denso, pero no cerrado.

(9) Definimos

$$\ell^p = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : ||x||_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$
$$\ell^{\infty} = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : ||x||_{\infty} = \sup_i |x_i| < \infty\}.$$

(a) Probar que ℓ^1 y ℓ^{∞} son de Banach con las normas $|| \ ||_1$ y $|| \ ||_{\infty}$ respectivamente, pero ℓ^1 no es de Banach con la norma $|| \ ||_{\infty}$. (O sea ℓ^1 no es subespacio cerrado de ℓ^{∞}).
(b) ℓ^1 es subespacio vectorial denso (propio) de ℓ^2. (Por lo tanto no es completo con la $|| \ ||_2$).
(c) La clausura de ℓ^1 y ℓ^2 en ℓ^{∞} es

$$C_0 = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \lim_{i \to \infty} |x_i| = 0\}.$$

Por lo tanto C_0 es de Banach con la $|| \, ||_\infty$ y

$$\ell^1 \subsetneqq \ell^2 \subsetneqq C_0 \subsetneqq C = \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty : \exists \lim_{i\to\infty} x_i\} \subsetneqq \ell^\infty$$

¿ Es C cerrado en ℓ^∞ ?.

(d) Probar que $||x||_\infty \leq ||x||_2$ para todo $x \in \ell^2$ y $||x||_2 \leq ||x||_1$ para todo $x \in \ell^1$. (Primero suponer que $|| \, ||_1 = 1$ o $|| \, ||_2 = 1$ según el caso).

(e) Las $|| \, ||_1$ y $|| \, ||_\infty$ no cumplen con la regla del paralelogramo y por lo tanto ℓ^1 y ℓ^∞ no son de Hilbert. Pero ℓ^1 es de pre-Hilbert con la $|| \, ||_2$. ¿ Son ℓ^1, C, o C_0 de pre-Hilbert con la $|| \, ||_\infty$?.

(10) (a) Probar que $(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$ es un producto escalar y notar que $(f,f)^{\frac{1}{2}} = ||f||_2$.
(b) $||f+g|| = ||f|| + ||g||$, donde $|| \, ||$ viene dada de un producto escalar, si y sólo si $f = \alpha g$ o $g = \alpha f$ para algún $\alpha \geq 0$. Deducir que $|| \, ||_1$ y $|| \, ||_\infty$ no vienen dadas por ningún producto escalar.
(c) Si consideramos $C[a,b]$, probar que para toda $f \in C[a,b]$ $||f||_p \leq ||f||_q$, si $p < q$.
(d) $||f||_1 \leq (b-a)^{\frac{1}{q}}||f||_p \leq (b-a)||f||_\infty$ y $||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||f||_p$
(e) La $|| \, ||_p$ cumple la regla del paralelogramo si y sólo si $p = 2$. Luego $|| \, ||_2$ es la única que viene de un producto escalar.

(11) (a) Probar que $L^\infty(X,\mu)$ es de Banach y no separable (donde μ es σ finita).
(b) Probar que ℓ^∞ no es separable.

(12) (a) Sea $\mathfrak{N}_p$, el espacio $C[a,b]$ con la norma $|| \, ||_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Probar que $\mathfrak{N}_p$ es de Banach si y sólo si $p = \infty$.
(b) Los espacios

$$C_a = \{f \in C(\mathbb{R}) : f \text{ es acotada}\}, \qquad C_0 = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$$

$$\text{y} \quad C_p = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) = f(x+2\pi) \; \forall \, x \in \mathbb{R}\}$$

son de Banach con la $||f|| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, pero no el espacio

$$C_c = \{f \in C(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ fuera de un compacto}\}.$$

(13) Sea $\mathcal{H} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{es absolutamente continua }, f(0) = 0, \text{y} f' \in L^2((0,1))\}$. Definimos $(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ para $f, g \in \mathcal{H}$. Probar que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.

(14) `Definición`: *Sea G un abierto en $\mathbb{C}$, denotamos por $L_a^2(G)$ el conjunto de todas las funciones analíticas en G tal que*

$$\int\int_G |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty.$$

$L_a^2(G)$ Se llama el espacio de Bergman para G

Consideraremos también aparte de la definición de integral dada por la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ la integral

$$\int_G f d\text{Area}$$

Observar que $L_a^2(G) \subset L^2(\mu)$ donde $\mu = \text{Area}|G$. Esto implica que $L_a^2(G)$ tiene un producto interno (y norma) natural heredado de $L^2(\mu)$.

(a) Si f es analítica en un entorno de $\overline{B}(a,r)$ entonces

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int\int_{B(a,r)} f.$$

(b) Si $f \in L_a^2(G)$, $a \in G$ y $0 < r < \text{dist}(a, \partial G)$, entonces

$$|f(a)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}}||f||_2$$

(c) Probar que $L_a^2(G)$ es un espacio de Hilbert.