Análisis Funcional I – 2011

Práctico 2

(1) Sea S subespacio vectorial del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.
   (a) S es denso si y sólo si $S^{\perp} = 0$.
   (b) $\overline{S} = S^{\perp\perp}$.

(2) Sea $\mathcal{P}$ un pre-Hilbert. Si $S \subset \mathcal{P}$ entonces
   (a) $S \subset (S^{\perp})^{\perp} \doteq S^{\perp\perp}$. (b) $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp} = (\overline{S})^{\perp}$. (c) $S \cap S^{\perp} \subset \{0\}$. (d) $\mathcal{P}^{\perp} = \{0\}$ y $\{0\}^{\perp} = \mathcal{P}$.
   (e) Si $S_1 \subset S_2$ entonces $S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$.

(3) Sea $\mathcal{P}$ pre-Hilbert, probar que $\mathcal{P}$ separable si y sólo si existe $\{\varphi_i\}$ ortonormal total numerable.

(4) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión infinita entonces toda base algebraica es no numerable.

(5) Sea $\mathcal{P}$ un espacio pre-Hilbertiano. Dar un ejemplo de $F \in \mathcal{P}'$, tal que F no esta generado por ninguna g en $\mathcal{P}$.

(6) Un espacio pre-Hilbert $\mathcal{P}$ es completo si, y sólo si, para toda $F \in \mathcal{P}'$ existe un $y \in \mathcal{P}$ tal que $F(x) = (x, y)$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

(7) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y φ sesquilineal en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, entonces son equivalentes
   (a) φ acotada. (b) φ continua en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. (c) φ continua en $(0, 0)$.

(8) Consideremos el espacio $L^{\infty}[0,1]$, con la norma $|| \, ||_{\infty}$. Sea $S = \left\{ f \in L^{\infty} : \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f = 1 \right\}$. Probar que S es convexo y cerrado y que no existe una f en S con distancia mínima al cero.

(9) Consideremos $C[0,1]$ con la $|| \, ||_2$. Sea $S = \left\{ f \in L^1 : \int_0^1 f = 1 \right\}$. Probar que S es convexo y cerrado y que existen infinitas f con distancia mínima al cero.

(10) Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N}$ espacios de normados y $\mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) = \{A : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M} : A$ es lineal y continua$\}$.
   (a) Probar que $\mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ es un espacio normado con $||A|| = \sup_{x:||x|| \leq 1} ||Ax|| = \sup_{x:||x||<1} ||Ax|| = \sup_{x:||x||=1} ||Ax||$.
   (b) Probar que $\mathcal{B}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ es de Banach si $\mathfrak{M}$ lo es.

(11) (a) Un normado $\mathfrak{N}$ es completo si y sólo si la condición $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ implica existe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$ ($x_n \in \mathfrak{N}$)
   (b) Sea $\mathfrak{N}$ es completo. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente (es decir no depende del orden). No vale la recíproca.

(12) Sea A lineal definida en un normado $\mathfrak{N}$. A es continua en todo $\mathfrak{N}$ si y sólo si lo es en algún $x_0 \in \mathfrak{N}$.

(13) Las inclusiones $i : \ell_1 \to \ell_2$ e $i : \ell_2 \to \ell_{\infty}$ son continuas.

(14) (a) Si $\mathfrak{N}_p$ es el espacio $C[a,b]$ con la $|| \, ||_p$ y si definimos el operador $A(f) = f(a)$ para toda f en $C[a,b]$, probar que $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{N}_p, \mathbb{K})$ si y sólo si $p = \infty$.
   (b) Id:$\mathfrak{N}_{\infty} \to \mathfrak{N}_2 \to \mathfrak{N}_1$ son continuas. (Hallar sus normas).
   Id:$\mathfrak{N}_1 \to \mathfrak{N}_2 \to \mathfrak{N}_{\infty}$ son discontinuas.
   (c) Buscar sucesiones $\{f_n\} \subset C[a,b]$ tal que $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in [a,b]$ pero $||f_n||_1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y otra $\{f_n\}$ tal que $||f_n||_1 \to 0$ pero $\sup_n |f_n(x)| = \infty$ para todo $x \in [a,b]$.