Análisis Funcional I – 2011

Práctico 3

Definición: *Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, es espacio de Banach con un producto xy (de $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$) tal que para todo x, y, z en $\mathcal{A}$ y α en el cuerpo $\mathbb{K}$ vale*

(1) $(xy)z = x(yz)$.
(2) $x(y+z) = xy + xz$.
(3) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.
(4) $||xy|| \leq ||x|| ||y||$.

Observación: el inciso (4) implica la continuidad del producto. (Probarlo)

Definición: $A : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *es morfismo de álgebras de Banach si para todo x, $y \in \mathcal{A}_1$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene*

(1) $A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y)$
(2) $A(xy) = A(x)A(y)$
(3) $||A(x)|| \leq C||x||$.

Observación: Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ tienen identidad para el producto entonces $A(e_{\mathcal{A}_1}) = e_{\mathcal{A}_2}$ y si existieran los inversos $A(x^{-1}) = A(x)^{-1}$. (Probarlo)

(1) (a) Probar que ℓ^∞ es un álgebra de Banach con la suma usual y el producto $x.y = \{x_i y_i\}_{i=1}^\infty$.
(b) Probar que $(\ell^\infty, .)$ tiene identidad.
(c) Probar que $L^1(T)$ es un álgebra de Banach con la suma usual de funciones y el producto dada por la convolución.
(d) Probar que $\widehat{\quad} : L^1(T) \to \ell^\infty$ es morfismo de álgebras de Banach.
(e) Probar que $(L^1(T), *)$ no tiene identidad.

(2) (a) Sea $f \in L^1(T)$ Probar que la aplicación $t \to L_t f \doteq f(t+x)$ de $\mathbb{R}$ en $L^1(T)$, es continua.
(b) Probar que si $\{K_n\}$ es una aproximación de la identidad, entonces $f * K_n \to_{n\to\infty} f$ en el $L^1(T)$.
(c) Probar que $\widehat{\quad} : L^1(T) \to \ell^\infty$ es inyectiva.

(3) (a) Probar que que si $f \in C^k(T)$ entonces $\widehat{f^k}(n) = i^k n^k \widehat{f}(n)$.
(b) $\widehat{L_h f}(n) = \widehat{f}(n) e^{inh}$.
(c) $\widehat{e^{ik\cdot} f}(n) = \widehat{f}(n-k)$.

(4) (a) Si A una matriz en $B(\mathbb{C}^n)$ tal que $(A)_{ij} = \alpha_{ij}$, entonces A^* es la matriz tal que $(A^*)_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}$. ($\mathbb{C}^n$ el espacio de Hilbert con $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$).
(b) Sea $A(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. Probar que $A \in B(\ell^2)$ y $A^*(x) = (x_2, x_3, \cdots)$. Comprobar que $A^*A = I \neq AA^*$.

(5) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. P es proyección ortogonal sobre S si y sólo si $P^* = P = P^2$.

(6) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales sobre S_1 y S_2 respectivamente. Probar
(a) $P_1P_2 = 0 \iff P_2P_1 = 0 \iff < S_1, S_2 >= 0 \implies S_1 \oplus S_2$ es subespacio cerrado y $P_1 + P_2$ es proyección ortogonal sobre él. Observación: en el caso en que $P_1P_2 = 0$ se dice que son ortogonales.
(b) $P_1P_2 = P_2P_1 \implies P_1P_2$ es proyección ortogonal sobre $S_1 \cap S_2$.
(c) Dar un ejemplo en que $P_1P_2 \neq P_2P_1$

(7) Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales sobre S_1 y S_2 respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(a) $P_1P_2 = P_1$.
(b) $P_2P_1 = P_1$.
(c) $||P_1x|| \leq ||P_2x||$.
(d) $S_1 \subset S_2$
(e) $< P_1x, x > \leq < P_2x, x > \quad \forall x \in \mathcal{H}$.