Análisis Funcional I – 2011
Práctico 6

(1) Sean $\{X,\mathcal{P}\}$ y $\{Y,\mathcal{Q}\}$ dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos (EVTLC), generados por las familias de seminormas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ respectivamente. Sea $A : X \to Y$ lineal.
A es continua si y sólo si, para todo $q \in \mathcal{Q}$ existen $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ y $M > 0$ tales que

$$q(A(x)) \leq M[p_1(x) + \cdots + p_n(x)]$$

para todo $x \in X$.

(2) Sea Ω un abierto no vacío del plano complejo, y sea $H(\Omega)$ el subespacio de $C(\Omega)$ (con la topología definida en el teórico) de funciones holomorfas (analíticas) en Ω. Probar que $H(\Omega)$ es de Fréchet.

(3) Sean $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n-uplas de enteros mayores o iguales a cero, y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_n}$ y $p_{\alpha,\beta} f = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta||D^\alpha f(x)|$.
Sea

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : p_{\alpha,\beta} f < \infty\ \forall, \alpha, \beta\}.$$

(a) Probar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Fréchet.
(b) Probar que $f \to x^\alpha f$, $f \to D^\alpha f$ y $f \to gf$ son continuas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donde $g \in \mathcal{S}$.

(4) Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

(a) Probar que $f * g \in L^1$ y que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(b) Probar que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.
(c) Probar que $\widehat{\cdot}$ es continua de $L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$.

(5) Probar que las siguientes funcionales están en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:
(a) $\delta_a f = f(a)$.
(b) Sea $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $L_g(f) = \int fg$.

(6) Probar que las siguientes funcionales están en $(C^\infty)'(\mathbb{R}^n)$:
(a) $\delta_a f = f(a)$.
(b) Sea $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $L_g(f) = \int fg$.

(7) Sea $C = C[0,1] = \{f[0,1] \to \mathbb{C}, \text{continuas}\}$. Definimos

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\, dx.$$

Sea (C,σ) el espacio C con la topología inducida por esta métrica y (C,τ) el espacio C con la topología de las seminormas

$$p_x(f) = |f(x)|, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

(a) Probar que todo conjunto τ-acotado también es σ-acotado y por lo tanto la $id : (C,\tau) \to (C,\sigma)$ manda conjuntos acotados en conjuntos acotados.
(b) Probar que $id : (C,\tau) \to (C,\sigma)$ no es continua, a pesar que es sucesionalmente continua, (por el teorema de la convergencia dominada), y por lo tanto (C,τ) no es metrizable. Probar también que (C,τ) no tiene base local numerable.
(c) Probar que toda funcional lineal en (C,τ) es de la forma $f \to \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$, para alguna elección de puntos $x_1, \dots, x_n \in [0,1]$ y algunos $c_i \in \mathbb{C}$.
(d) Probar que los únicos abiertos convexos de (C,σ) son $\emptyset$ y C.
(e) $id : (C,\sigma) \to (C,\tau)$, no es continua.