

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA ONDÍCULA ("WAVELET") EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

Luis A. Montejo^a, Luis E. Suárez^b

^a *Estudiante doctoral, Civil, Construction and Environmental Engineering Department, North Carolina State University, P.O. Box 7908, Raleigh, North Carolina 27695-7908, USA.*

^b *Departamento de Ingeniería Civil y Agrimensura, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, P.O. Box 9041, Mayagüez, Puerto Rico, 00681-9041, <http://civil.uprm.edu>*

Palabras Clave: transformada ondícula, identificación de sistemas, detección de daño, monitoreo de salud estructural.

Resumen. La transformada ondícula (conocida en inglés como "wavelet transform") es una herramienta matemática relativamente nueva que es especialmente útil para el procesamiento y análisis de señales. Por medio de la transformada ondícula se puede realizar una descomposición simultánea en el dominio del tiempo (o del espacio) y de la frecuencia (o más propiamente de una "escala"). Por esta característica la transformada ondícula es capaz de proveer más información sobre señales no estacionarias comparada con la tradicional transformada de Fourier. A pesar de su gran potencial, las ondículas no han alcanzado la difusión del análisis de Fourier, en parte por la complejidad matemática involucrada. En este artículo se presenta la transformada ondícula de una manera accesible a los no especialistas que están familiarizados con la transformada de Fourier y se incluyen dos aplicaciones de esta nueva herramienta que pueden ser de utilidad en la ingeniería civil, mecánica y aeroespacial. Una de las aplicaciones es la detección de las frecuencias instantáneas que pueden formar parte de una señal como un registro de aceleraciones y la otra es como un método para la detección de daño en una estructura (o un cambio súbito de las propiedades de un elemento estructural).

1 INTRODUCCION

La teoría de la transformada ondícula fue desarrollada por matemáticos en los años setenta con el fin de dar solución a problemas abstractos. En ese entonces nadie anticipó las importantes aplicaciones que luego tendría en el análisis y procesamiento de señales. El origen de la transformada ondícula tal como se conoce hoy en día se remonta al trabajo en geofísica de dos investigadores franceses: J. Morlet y A. Grossmann (Grossman y Morlet, 1984). Años después, Daubechies y Mallat (Mallat, 1999) definieron la conexión entre las ondículas y el procesamiento digital de señales. Desde entonces el crecimiento de las investigaciones en esta área ha sido explosivo.

La transformada ondícula se usa en la actualidad en muchos campos de la ciencia y la ingeniería, y con una mayor intensidad en el procesamiento digital de señales, el procesamiento de imágenes y en comunicaciones. En el área de vibraciones mecánicas, uno de los primeros investigadores en aplicar la transformada ondícula fue Newland (1994). Las ondículas también han sido utilizadas en el monitoreo de integridad estructural. Por ejemplo, Al-Khalidy y coautores (1997) publicaron varios artículos sobre la detección de daño en estructuras usando ondículas. Las ondículas han demostrado también ser útiles también en la caracterización de la propagación de ondas dispersivas para la detección de delaminaciones en materiales compuestos (Jeong y Jang, 2000; Ip y Mai, 2004). Por último, también se han presentado aplicaciones en dinámica de suelos e ingeniería de terremotos, como por ejemplo los trabajos de Haigh y coautores (2002), Suárez y Montejo (2005), y Montejo y Suárez (2006).

La intención de este trabajo es presentar de una manera simple y concisa los fundamentos de la transformada ondícula en su versión continua y un par de aplicaciones ingenieriles. La primera es la detección en una señal en el tiempo de componentes de distinta frecuencia que no están presente durante toda la duración de la señal. La otra aplicación es la detección de la ocurrencia de un daño repentino que se presenta en una estructura y que se manifiesta como un pequeño cambio en la rigidez de un elemento.

2 LA TRANSFORMADA ONDÍCULA

Tal vez la mejor manera de entender el concepto de la transformada ondícula es comparándola con la muy conocida transformada de Fourier. Tanto la transformada ondícula como la transformada de Fourier analizan una señal $f(t)$ (o una función del espacio x) comparándola con otra señal más simple y de la cual se conocen a priori sus características. En el caso de la transformada de Fourier la señal a analizar se compara con funciones sinusoidales de duración infinita y expresadas en forma compleja como $e^{-i\omega t}$. Para efectuar la comparación se multiplican las dos señales y se integran en el tiempo como se muestra en la ecuación (1). Las funciones complejas $e^{-i\omega t}$ se conocen como “funciones de comparación”. Lógicamente, mientras más parentesco exista entre la señal original y la función de comparación mayor será el valor de la integral.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

El resultado de esta transformación son los llamados coeficientes de Fourier $F(\omega)$. Un gráfico del valor absoluto de estos coeficientes en función de la frecuencia se conoce como el

espectro de Fourier. El espectro de Fourier es la herramienta más utilizada en análisis de señales y brinda información muy valiosa sobre el contenido de frecuencias de la señal analizada.

Partiendo de los coeficientes de Fourier $F(\omega)$ se puede recuperar la señal que los originó mediante la transformada inversa de Fourier. El procedimiento consiste básicamente en multiplicar cada coeficiente de Fourier por “ondas” sinusoidales y cosenoidales de frecuencia ω expresadas en forma compleja como $e^{i\omega t}$. El resultado es un conjunto infinito de funciones senos y cosenos con amplitud compleja $F(\omega)(\cos\omega t + i \sin\omega t)$ que sumadas reconstituyen la señal original $f(t)$. Gráficamente la transformada de Fourier y su transformada inversa se pueden representar como se muestra en la Figura 1.

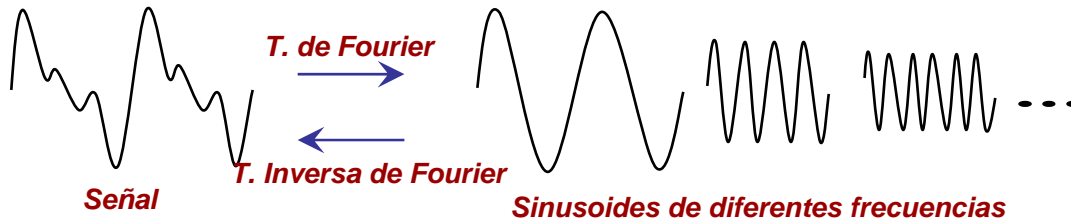


Figura 1: Transformada de Fourier y su transformada inversa.

A diferencia de la transformada de Fourier, la transformada ondícula no descompone la señal en un grupo de sinusoides y cosinusoides de amplitud constante (para cada frecuencia ω) y de infinita duración. La transformada ondícula, como su nombre lo sugiere, descompone la señal en una serie de pequeñas ondas u “ondículas”. En términos simples, las “ondículas” son ondas localizadas, o sea señales que descienden rápidamente a cero después de unas pocas oscilaciones, y que tienen un valor promedio nulo. Las ondículas que hacen las veces de funciones de comparación pueden ser funciones reales o complejas. La Figura 2 muestra una de las primeras ondículas propuestas llamada de “Morlet” (Mallat, 1999). Esta es una función compleja que se define como:

$$\Psi(t) = e^{i\Omega t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} \quad (2)$$

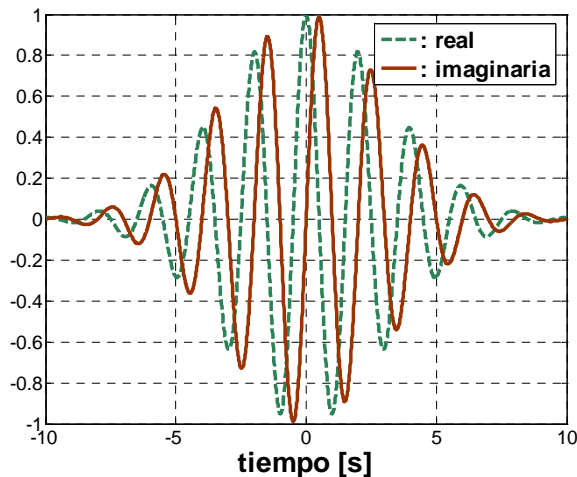


Figura 2: Parte real e imaginaria de la ondícula Morlet para valores de $\Omega = \pi$ y $\sigma = 1$.

La función $\Psi(t)$ definida en la ecuación (1) y que se muestra en la Figura 2 está centrada en el tiempo $t = 0$ y, si bien en teoría se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$, sólo tiene un valor significativo entre dos instantes de tiempo que dependen de los parámetros Ω y σ (por ejemplo, -10 s y +10 s en la Figura 2 con los parámetros usados). Si se desea centrar la función $\Psi(t)$ en un valor distinto de cero, digamos en el tiempo “ b ” y si interesa ampliar o reducir el intervalo de tiempo en que la función tiene valores no nulo significativos, se puede trasladar y escalar la ondícula básica $\Psi(t)$ a través de un factor “ a ” como se indica en la siguiente expresión (13). Para distinguir a la función trasladada y escalada de aquella original, se suele usar la notación $\psi_{a,b}$:

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3)$$

La función original $\Psi(t)$ sin trasladar ni escalar usualmente se la denomina la “ondícula madre”. Las funciones $\psi_{a,b}$ serán las funciones de comparación que reemplazan a las exponenciales complejas de la transformada de Fourier. Es importante aclarar que cualquier función oscilatoria de corta duración con valor medio cero no califica matemáticamente como una “ondícula”. Estas funciones deben satisfacer varios otros criterios que no se mencionarán aquí. El lector interesado puede consultar la monografía de Mallat (1999). Los autores de este artículo (Suárez y Montejo, 2005) también definieron una nueva ondícula madre a la que denominaron la “ondícula respuesta a impulso” (“impulse response wavelet”).

Una vez definida las funciones de comparación, podemos definir la transformada ondícula como la suma en el tiempo del producto de la señal por la versión escalada y trasladada de la ondícula original:

$$C(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ab}(t) dt \quad (4)$$

De la ecuación (4) es evidente que la transformada ondícula es una transformación bi-dimensional, o sea con dos parámetros: para una señal dependiente del tiempo $f(t)$, los dos dominios de la transformada serán el tiempo b y el parámetro a llamado la “escala”. El resultado de la transformada es la descomposición de la señal en el tiempo en una serie de coeficientes $C(a,b)$ reales o complejos (dependiendo de la ondícula usada), que son función de dos parámetros reales $a \neq 0$ y b . Nótese también que la descomposición se lleva a cabo mediante un convolución entre la señal y la ondícula.

Así como en la transformada de Fourier la señal original $f(t)$ se puede recuperar con la transformada inversa, aquí $f(t)$ se puede recomponer con la llamada “fórmula de reconstrucción”:

$$f(t) = \frac{1}{K_{\psi}} \int_{a=0}^{\infty} \int_{b=-\infty}^{\infty} C(a,b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2} \quad (5)$$

La ecuación (5) es efectivamente la transformada ondícula inversa. La constante K_{ψ} depende de la “ondícula madre” seleccionada.

Gráficamente la transformada ondícula y su transformada inversa se pueden representar como se muestra en la Figura 3. Las “ondas” que constituyen la señal en el tiempo son $f(t)*\psi_{a,b}(t)$: éstas son funciones de corta duración centradas en el tiempo “ b ”.

Para sus aplicaciones prácticas los ingenieros prefieren trabajar con frecuencias en vez de “escalas”. La escala a puede ser relacionada *aproximadamente* con la frecuencia: se puede demostrar que a es inversamente proporcional a una frecuencia que depende del tipo de ondícula usada. Por ejemplo, en el caso de la ondícula Morlet la relación entre la escala y la frecuencia, y entre la escala y el periodo están dadas por:

$$\omega_j = \frac{\Omega}{a_j} \quad ; \quad T_j = \frac{2\pi}{\Omega} a_j \quad (6)$$

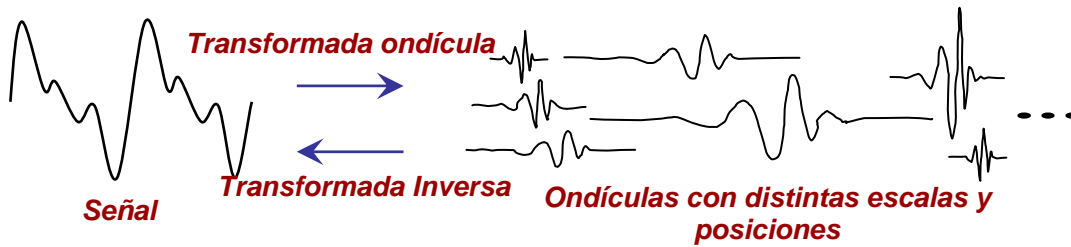


Figura 3: La transformada ondícula y su transformada inversa.

Aunque en las aplicaciones presentadas en este artículo se usará la versión continua de la transformada, se debe mencionar que en algunas de las aplicaciones de la transformada ondícula se trabaja con la transformada discreta. Es necesario también resaltar que, a diferencia de la transformada de Fourier en la cual el cambio del dominio continuo al discreto es intuitivo, en el caso de la transformada ondícula la transición no es en absoluto evidente.

Otra característica que diferencia a la transformada ondícula de otras transformadas es que hay más de una “función de comparación”, o en otras palabras la transformación puede realizarse con distintas ondículas. Surge entonces la pregunta: cuál es la más efectiva? Este interrogante no se puede contestar de manera definitiva. Para cada aplicación hay una ondícula $\Psi(t)$ que es más adecuada que las otras, pero en general encontrarla requiere un proceso de prueba y error.

Para apreciar varias de las aplicaciones de la transformada ondícula en el área de vibraciones y mecánica estructural es conveniente abundar más sobre la descomposición en señales constituyentes de la transformada ondícula. De lo discutido antes, se sabe que una señal arbitraria puede ser descompuesta por la transformada ondícula en un grupo de señales ocurriendo a distintos tiempos. Una característica muy útil de estas componentes es que cada una tiene una frecuencia dominante distinta. Consideremos la integral interior en la doble integral en la ecuación (5). Para cada valor de la escala a se puede definir una función $D(a,t)$ como:

$$D(a,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(a,b)\psi_{a,b}(t)db = \frac{1}{a^{5/2}} \int_{-\infty}^{\infty} C(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)db \quad (6)$$

Estas funciones $D(a,t)$ se las conoce como “detalles”. Para las implementaciones prácticas se usa una versión discreta de la expresión (6). De esta manera las funciones $D(a,t)$ se pueden definir como:

$$D(a_j, t) = \frac{\Delta b}{a_j^{5/2}} \sum_{j=1}^n C(a_j, b) \psi\left(\frac{t-b}{a_j}\right) \quad (7)$$

Si bien los detalles no son funciones puramente armónicas como en el caso de la transformada de Fourier, sí tienen una frecuencia predominante que se está definida por la frecuencia dominante de la ondícula escalada $\psi(t-b/a_j)$. Esto se comprobará más adelante con un ejemplo.

Conociendo los detalles se puede recuperar la señal en el tiempo mediante la aplicación de la ecuación (6), rescrita como se muestra a continuación:

$$f(t) = \int_{a=0}^{\infty} \left(\int_{b=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} C(a, b) \psi_{a,b}(t) db \right) da = \int_0^{\infty} D(a, t) da \quad (9)$$

La forma discreta de la ecuación (9) es de la forma:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n-1} D(a_i, t) \Delta a_i \quad (10)$$

3 ANALISIS EN EL DOMINIO DE EL TIEMPO Y LA FRECUENCIA

La transformada de Fourier presenta desventajas en algunas aplicaciones, en especial en aquellas que tratan con el análisis de señales no estacionarias. Cuando se pasa al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier, la información de lo que ocurre en el tiempo se pierde. Cuando se observa un espectro de Fourier es sencillo distinguir el contenido de frecuencias de la señal que se está analizando. Sin embargo, no es posible deducir en qué tiempo aparecen o desaparecen las componentes de la señal que tienen las frecuencias que aparecen en el espectro. Si las propiedades de la señal no cambian mucho en el tiempo, como en el caso de una señal estacionaria, el problema no es tan grave. Sin embargo una gran cantidad de las señales de interés en ingeniería civil y mecánica y en geofísica presentan características no estacionarias, las cuales son a menudo la parte más importante de la señal y la transformada de Fourier no puede detectarlas. De ahí la necesidad de un análisis en ambos dominios, el tiempo y la frecuencia. Un análisis en el tiempo y la frecuencia puede dar valiosa información sobre la evolución del contenido de frecuencia de una señal en el tiempo. Si bien no es la única herramienta para realizar este tipo de análisis, la transformada ondícula es una técnica ventajosa.

Para mostrar la utilidad de esta herramienta, se generó artificialmente la señal $f(t)$ que se muestra en la Figura 4(a). La Figura 4(b) muestra el espectro de Fourier de esta señal. A partir del espectro de Fourier podemos decir que la señal tiene cuatro frecuencias dominantes, que corresponden a cada uno de los picos en el espectro, o sea: 50 kHz, 100 kHz, 200 kHz y 280 kHz.

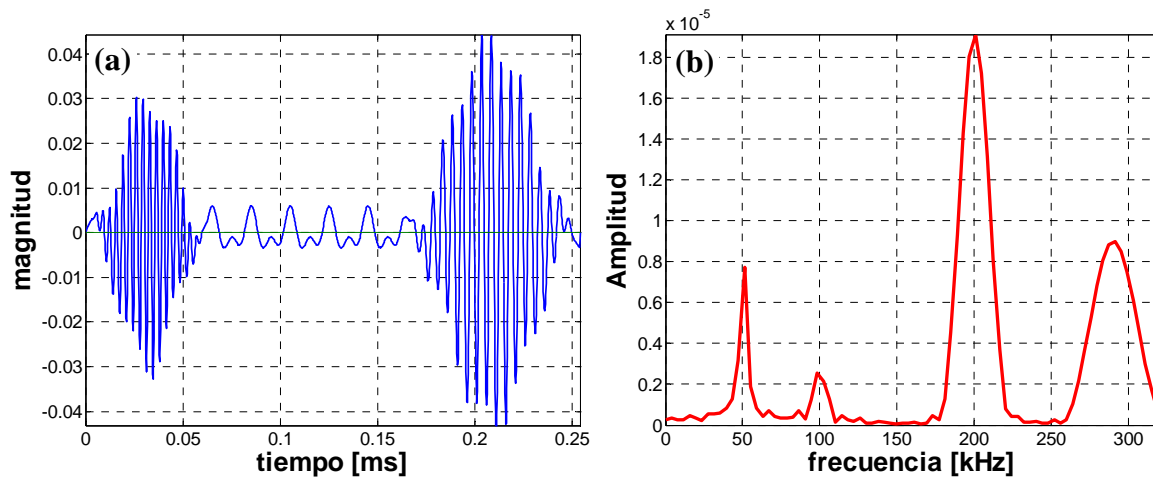


Figura 4: Señal en el dominio del tiempo (a); y su respectivo espectro de Fourier (b).

Las preguntas que surgen son: ¿en que tiempo ocurren estas señales?, ¿están cada una de estas frecuencias presentes a lo largo de toda la duración de la señal? Esta información es imposible de “rescatar” a partir del espectro de Fourier. Sin embargo, un análisis en el tiempo y la frecuencia, como se muestra en las Figuras 5 y 6, nos permite identificar el tiempo en que sucede cada evento que constituye la señal. La Figura 6 muestra los coeficientes $C(a,b)$, obtenidos a partir de la aplicación de la ecuación (4) a la señal mostrada en la Figura 4(a) usando la ondícula Morlet.

La Figura 6 es similar a la Figura 5, pero esta vez se han graficado los valores absolutos de los coeficientes en dos dimensiones. Este tipo de gráfico es la forma tradicional de presentar los resultados de la transformada ondícula y se conoce con el nombre de “mapa de ondículas” (“wavelet map”). Los colores más claros indican valores más altos de los coeficientes $|C(a,b)|$. A partir de este gráfico es posible identificar las mismas cuatro frecuencias que coinciden con los picos el espectro de Fourier, pero además se puede establecer lo siguiente: la frecuencia de 50 kHz está presente durante toda la señal, la frecuencia de 100kHz ocurre entre 0.07 ms y 0.15 ms, la de 200 kHz entre 0.17ms y 0.25 ms y la de 280 kHz entre 0 y 0.05ms.

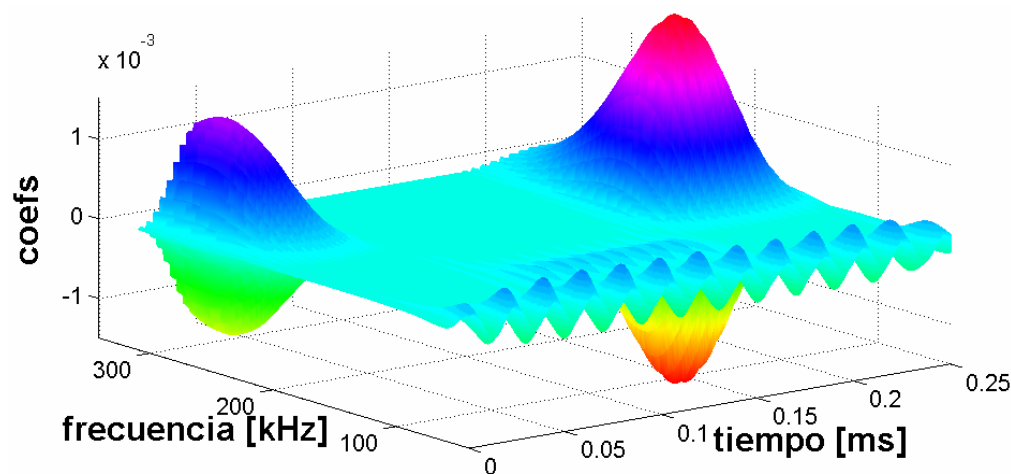


Figura 5: Coeficientes de la transformada ondícula.

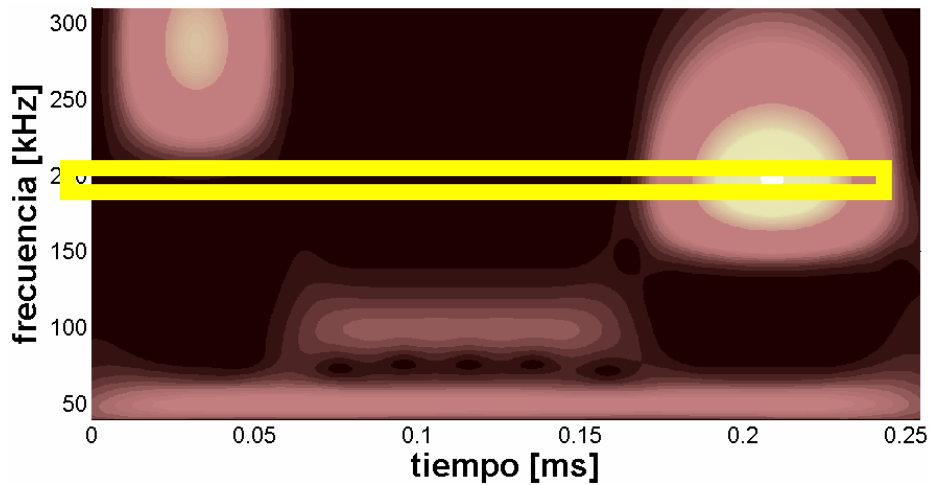


Figura 6: Mapa de ondículas de $f(t)$.

La Figura 7(a) muestra lo que definimos anteriormente como un “detalle”: en este caso el correspondiente a 200 kHz (resaltado en la Figura 6) y la Figura 7(b) es el espectro de Fourier de este detalle. Como se puede apreciar en estas dos figuras y como se mencionó antes, mediante la transformada ondícula se puede descomponer una señal en un grupo de nuevas señales constituyentes, cada una con una frecuencia dominante bien definida. Sin embargo, en la transformada de Fourier lo que sería equivalente a los detalles son funciones senoidales y cosenoidales de duración ilimitada y aquí los detalles son funciones transitorias de corta duración centradas alrededor de un tiempo específico.

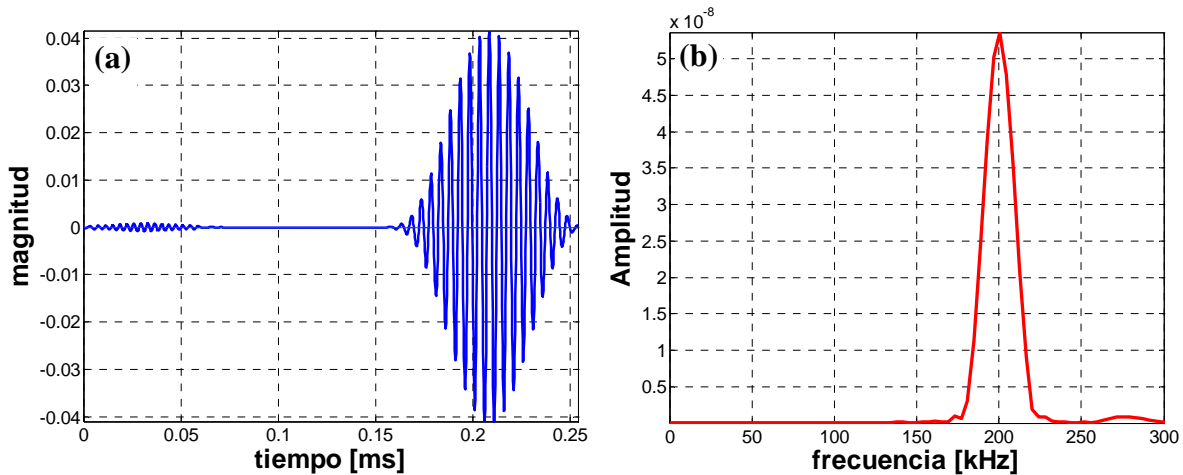


Figura 7: Detalle correspondiente a una frecuencia de 200 kHz y su respectivo espectro de Fourier.

4 DETECCIÓN DE DAÑO USANDO LA TRANSFORMADA ONDÍCULA

La detección de daño en estructuras usando la transformada ondícula se basa en el hecho de que la ocurrencia del defecto se refleja como una discontinuidad en la respuesta de la estructura. En la mayoría de los casos estas discontinuidades no son fáciles de detectar a simple vista. Sin embargo, los coeficientes de la transformada ondícula o los detalles correspondientes a una frecuencia relativamente alta (comparada con el rango de frecuencias de la respuesta de la estructura) permite detectar estas discontinuidades.

Con el fin de ejemplificar el procedimiento para la identificación de daño usando la transformada ondícula, se va a considerar el sistema simple de dos grados de libertad que se muestra en la Figura 8, el que puede representar un modelo de un edificio de corte de dos pisos o un edificio de un piso con un componente no estructural. La excitación del sistema es una aceleración sinusoidal en la base con una frecuencia de 3 Hz como se muestra en la Figura 9.

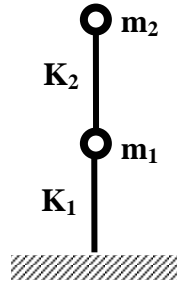


Figura 8: Sistema de dos grados de libertad.

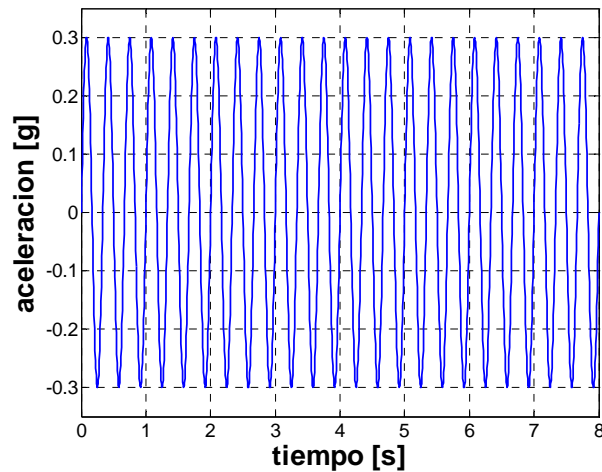


Figura 9: Excitación en la base de la estructura.

Las propiedades del sistema son: $K_1 = 1 \times 10^6$, $K_2 = 1000$, $m_1 = 1000$ y $m_2 = 1$ (todo en unidades consistentes), las frecuencias naturales del sistema serán entonces: $\omega_1 = \omega_2 \approx 5$ Hz. La respuesta del sistema fue simulada numéricamente mediante integración directa de la ecuación de movimiento usando el método de la aceleración promedio. Para simular el daño el valor de K_1 se redujo en un 2% a partir del tiempo $t = 4s$. La Figura 10 muestra la respuesta del sistema sin daño y la Figura 11 la respuesta del sistema al que se le ha simulado un daño. A simple vista es imposible detectar diferencia alguna entre las dos respuestas. Inclusive, el contenido de frecuencias de ambas respuestas según la transformada de Fourier es aparentemente el mismo, tal como se muestra en el espectro de Fourier de la respuesta de la segunda masa en la Figura 12. La Figuras 13 (a y b), muestran los coeficientes de la transformada ondícula correspondientes a una frecuencia de 30 Hz, obtenidos utilizando la ondícula Morlet. A partir del gráfico de estos coeficientes claramente se puede distinguir la discontinuidad que tiene lugar en el sistema en el instante $t = 4s$.

Se debe notar además que, aunque el daño fue introducido en el primer piso, éste fue detectado también a partir de la respuesta del segundo piso o segunda masa, es decir que con

un único sensor ubicado en el tope de la estructura hubiera bastado para la identificación del daño. Se debe notar también que el método no necesita de un conocimiento a priori de las propiedades de la estructura y que no se limita sólo a detectar la presencia de daño sino que también localiza el instante en que el daño ocurre.

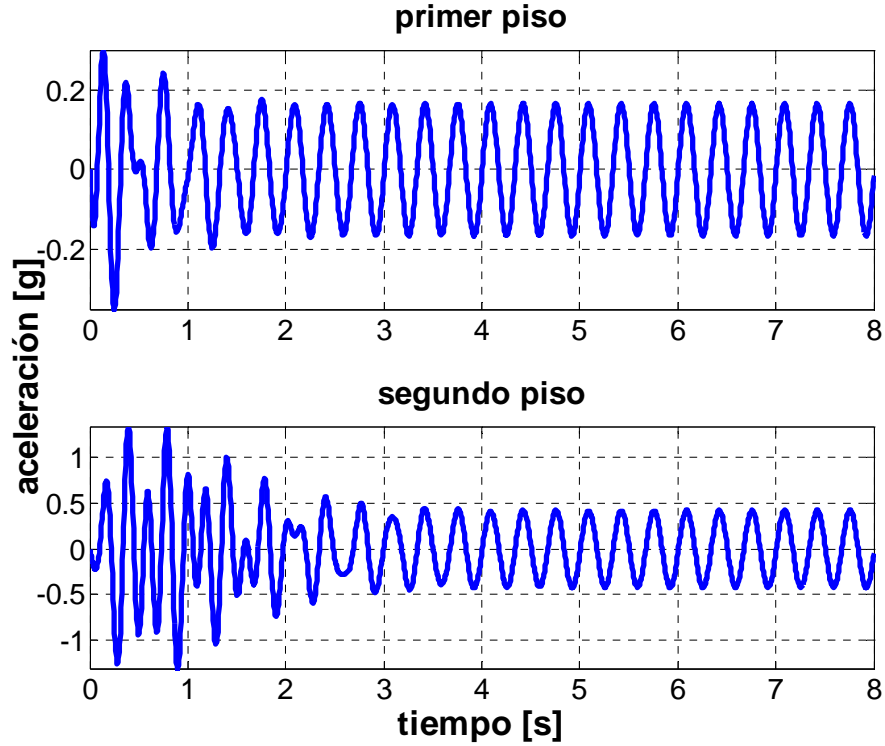


Figura 10: Respuesta del sistema sin daño.

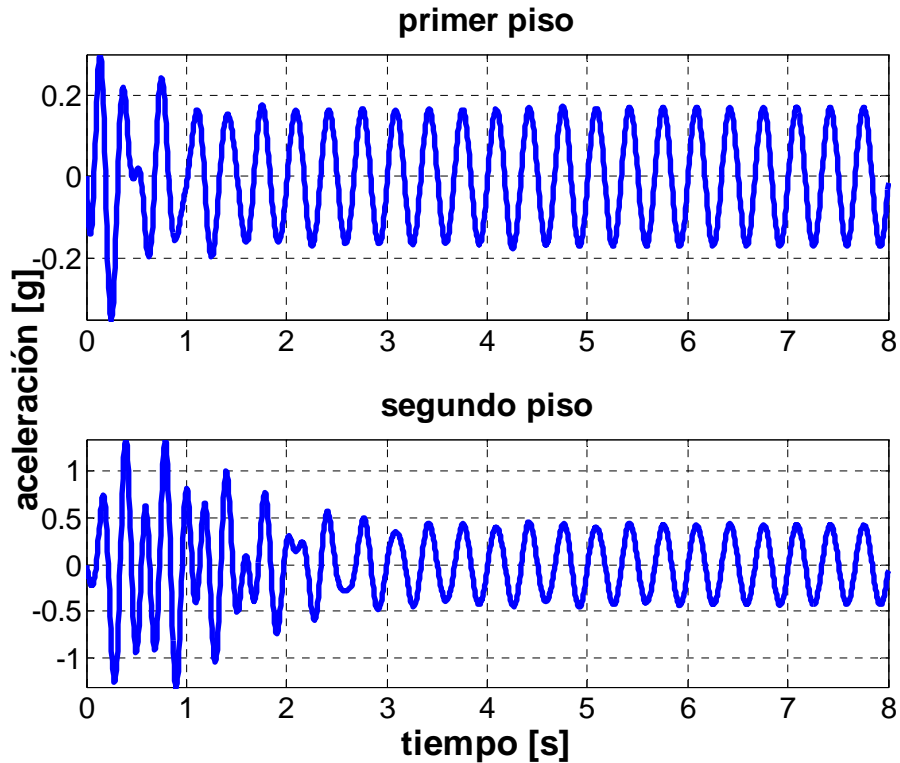


Figura 11: Respuesta del sistema con un daño en $t = 4s$.

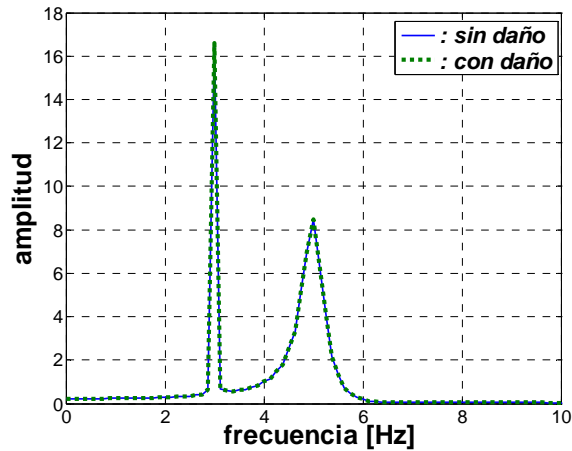


Figura 12: Espectro de Fourier de la respuesta del segundo piso.

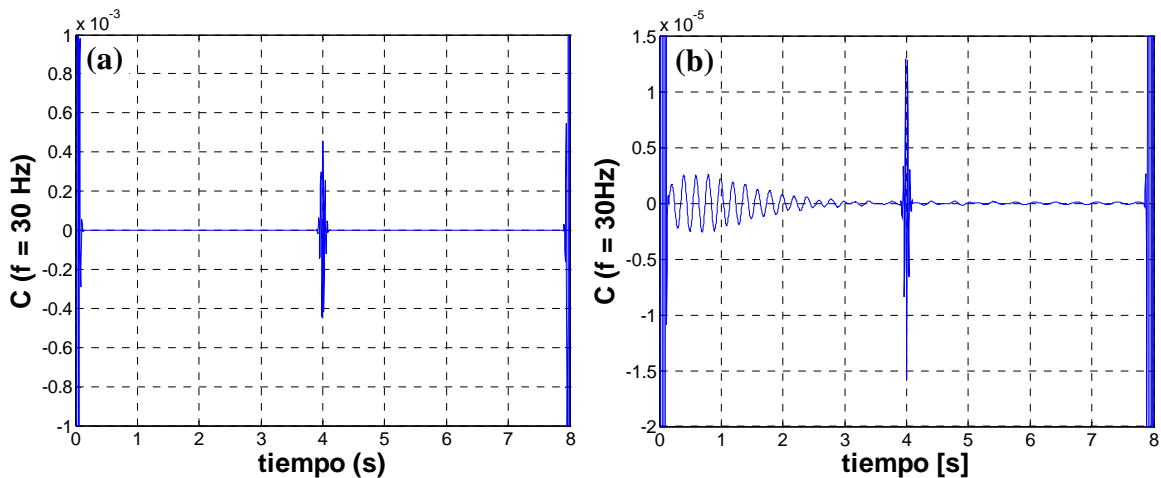


Figura 13: Coeficientes correspondientes a una frecuencia de 30 Hz (a) primer piso y (b) segundo piso.

El anterior es un ejemplo muy simple de detección de daño usando la transformada ondícula. A la hora de aplicar este procedimiento en un caso real hay otros factores que deben ser tomados en cuenta, tales como la presencia de ruido en la señal y diferentes tipos de excitación de la estructura. El lector interesado en ahondar más sobre el tema puede consultar por ejemplo los trabajos de Al-Khalidy y coautores (1997) y Hera y Hou (2004).

Es importante destacar que existen otras técnicas para la detección de daño usando la transformada ondícula dependiendo del tipo y ocurrencia del daño. En el caso presentado, el daño que se consideró es un cambio súbito en la rigidez de un elemento a partir de un cierto tiempo. Otro caso de interés sería averiguar si un elemento de una estructura existente ha cambiado sus propiedades de rigidez debido a la presencia de una o más grietas que no se pueden detectar por inspección visual. Este caso ha sido estudiado, por ejemplo, por Ovanosova y Suárez (2004) quienes utilizaron la transformada ondícula discreta para detectar grietas en estructuras aperticadas. La metodología propuesta se basó en el análisis de los desplazamientos transversales producidos por una carga estática usando los detalles de la transformada ondícula discreta. Mediante el procedimiento propuesto, los autores pudieron no sólo detectar la presencia de un daño sino también localizarlo espacialmente.

5 CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una introducción a la transformada ondícula en su versión continua, comparándola con la tradicional transformada de Fourier. Se discutieron sus ventajas sobre la transformada de Fourier para ciertos problemas. A través de un ejemplo numérico que consistía en una señal en el tiempo constituida por componentes de distinta frecuencia y distinto tiempo de comienzo y final, fue puesta en evidencia la capacidad de las ondículas para la detección de frecuencias instantáneas.

También se presentó a través de un ejemplo numérico un procedimiento para utilizar la transformada ondícula en el monitoreo de la integridad estructural de un sistema sencillo de dos grados de libertad. Si bien el caso tratado fue uno simple, quedó en evidencia el potencial de esta nueva herramienta de análisis para detectar cambios muy sutiles en la respuesta dinámica en el tiempo inducidos por un daño repentino.

REFERENCIAS

- Al-Khalidy, A., Noori, M., Hou, Z., Yamamoto, S., Masuda, A., y Sone, A. "Health Monitoring Systems of Linear Structures Using Wavelet Analysis", Proceedings of the International Workshop in Structural Health Monitoring, Stanford University, California, September 18-20, pp. 164-175. 1997.
- Haigh, S.K., Teymur, B., Madabhushi, S.P.G., y Newland, D.E. "Applications of Wavelet Analysis to the Investigation of the Dynamic Behavior of Geotechnical Structures", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.22, No.9-12, pp. 995-1005. 2002.
- Hera, A. y Hou, Z. "Application of Wavelet Approach for ASCE Structural Health Monitoring Benchmark Studies", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 130, No.1, pp. 96-104. 2004.
- Grossman, A. y Morlet, J. "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape", *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 15(4), pp.723-736. 1984.
- Ip K.H. y Mai Y.W. "Delamination detection in smart composite beams using Lamb waves", *Smart Materials and Structures*, No. 13, pp. 544-551. 2004.
- Jeong H. y Jang Y.S. "Wavelet analysis of plate wave propagation in composite laminates", *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 443-450. 2000.
- Mallat, S.G. *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2nd Edition, Academic Press, London, United Kingdom. 1999.
- Montejo, L. A. y Suárez, L. E. "Wavelet Based Identification of Site Frequencies from Earthquake Records." *Journal of Earthquake Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 565-594. 2006.
- Morlet, J. y Grossman, A. "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape", *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 15(4), pp. 723-736. 1984.
- Newland, D.E. "Wavelet Analysis of Vibration", *Journal of Vibration and Acoustics*, No.116, pp.409-424. 1994.
- Ovanosova, A. y Suárez, L. E. "Applications of Wavelet Transforms to Damage Detection in Frame Structures," *Engineering Structures*, Vol. 26, No.1, pp. 39-49. 2004.
- Suárez, L.E. y Montejo, L.A. "Generation of Artificial Earthquakes via the Wavelet Transform", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42 (21-22), pp. 5905-5919. 2005.