

El problema de Stefan unidimensional para el líquido sobreenfriado

Cristina Vilma Turner

1 Introducción

El problema clásico de Stefan unidimensional a una fase (caso fusión), consiste en hallar la temperatura $\theta = \theta(y, \tau)$ y la frontera libre $r = r(\tau)$ solución del siguiente sistema :

$$\begin{aligned} \theta_{\tau} &= \alpha \theta_{yy}, & 0 < y < r(\tau), & 0 < \tau < \tau_0 \\ \theta(r(\tau), \tau) &= 0, & 0 < \tau < \tau_0 \\ k \theta_y(r(\tau), \tau) &= -\rho l r'(\tau), & 0 < \tau < \tau_0 \\ k \theta_y(0, \tau) &= \Psi(\tau), & 0 < \tau < \tau_0 \\ \theta(y, 0) &= \phi(y), & 0 < y < b \\ r(0) &= b \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde:

k es la conductividad térmica.

ρ es la densidad de masa.

c es el calor específico.

l es el calor latente de fusión.

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ es la difusividad térmica.

ϕ es la temperatura inicial.

Ψ es el flujo de calor en el borde fijo $y = 0$.

Realizando el siguiente cambio de variables:

$$x = \frac{y}{b} \quad t = \frac{k}{\rho c b^2} \tau$$

$$z(x, t) = \frac{c}{l} \theta(y, \tau) \quad s(t) = \frac{r(\tau)}{b}$$

El problema (1.1) se transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_t, \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T \\ z(s(t), t) &= 0, \quad 0 < t < T \\ z_x(s(t), t) &= -\dot{s}(t), \quad 0 < t < T \\ z_x(0, t) &= g(t), \quad 0 < t < T \\ z(x, 0) &= h(x), \quad 0 < x < 1 \\ s(0) &= 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde:

$$g(t) = \frac{bc}{lk} \Psi(\tau), \quad h(x) = \frac{c}{l} \phi(y)$$

$$T = \frac{k}{\rho c b^2} \tau_0$$

$$D_T = \{(x, t) / 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T\}$$

Observemos que las nuevas variables independientes x, t y las nuevas variables dependientes $z(x, t), s(t)$ son adimensionales.

Además, la condición de flujo sobre el borde fijo $y = 0$ puede ser reemplazado por una condición de temperatura, es decir:

$$\phi(0, \tau) = \Psi_0(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_0$$

la cual se transforma en

$$z(0, t) = g_0(t), \quad 0 < t < T$$

$$\text{con } g_0(t) = \frac{c}{l} \Psi_0(\tau)$$

Diremos que el triplete (T, s, z) es una solución clásica de problema de frontera libre (1.2) si y sólo si:

- i) $T > 0$.
- ii) $s \in C[0, T]$, $\dot{s} \in C(0, T)$, $s(t) > 0$ en $[0, T)$.
- iii) La función $z = z(x, t)$ es continua y acotada en $0 \leq x \leq s(t)$, $0 \leq t \leq T$, la función $z_x(x, t)$ es acotada en dicho dominio y continua en el mismo salvo un eventual número finito de puntos sobre la frontera parabólica; las funciones $z_{xx}(x, t)$ y $z_t(x, t)$ son continuas en $0 < x < s(t)$, $0 < t < T$.
- iv) Se satisfacen las condiciones de (1.2).

El problema de Stefan ordinario ($h \geq 0$, $g \leq 0$) ha sido ampliamente estudiado. La existencia de solución está probada para todo T y $\dot{s}(t) \geq 0$.

En [1] y [2] se puede encontrar bibliografía sobre el tema.

El propósito de este trabajo es analizar el problema de Stefan unidimensional correspondiente al líquido sobreenfriado, es decir el caso $h \leq 0$, $g \geq 0$. Este problema difiere sustancialmente del problema de Stefan ordinario.

2 Análisis de los distintos tipos de solución

En esta sección y en las subsiguientes consideraremos el problema de Stefan para el líquido sobreenfriado con una condición de contorno en la cara fija $x = 0$ de temperatura. Por lo cual se requiere que la función g_0 sea una función no positiva y continua a trozos en cada intervalo $(0, t)$ $t > 0$ y h sea una función continua no positiva en el $[0, 1]$, $h(1) = 0$ y $h(x)$ Hölder continua en $x = 1$.

Entonces si la solución del problema (1.2) existe, tres diferentes tipos de comportamientos de la solución (T, s, z) se observan:

- (A) El problema tiene solución para T arbitrario.
- (B) Existe una constante $T_B > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow T_B^-} s(t) = 0$.
- (C) Existe una constante $T_C > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow T_C^-} s(t) > 0$ y $\lim_{t \rightarrow T_C^-} \dot{s}(t) = -\infty$.

La demostración se puede ver en [3] y [4].

Como veremos, cualquiera de estos tres casos puede ocurrir con una apropiada elección de las funciones $h = h(x)$ y $g_0 = g_0(t)$ en el problema (1.2).

Una manera apropiada de analizar cuáles datos iniciales y de contorno (h, g_0) generan soluciones de tipo A, B y C es a través de las denominadas integrales de energía, éstas son simplemente representaciones integrales del problema.

Por ejemplo, se puede probar fácilmente que si (T, s, z) es solución del problema (1.2) entonces se satisfacen las siguientes ecuaciones integrales

$$s(t) = 1 + \int_0^1 h(x) dx - \int_0^t z_x(0, \tau) d\tau - \int_0^{s(t)} z(x, t) dx \quad (2.3)$$

$$\frac{s^2(t)}{2} = \frac{1}{2} + \int_0^1 x h(x) dx + \int_0^t g_0(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} x z(x, t) dx \quad (2.4)$$

$$\frac{s^2(t)}{3} = \frac{1}{3} + 2 \int_0^t d\tau \int_0^{s(t)} z(x, t) dx - \int_0^{s(t)} z(x, t) x^2 dx + \int_0^1 h(x) x^2 dx \quad (2.5)$$

Las cuales se obtienen usando la identidad de Green

$$\int \int_{D_t} (uLz - zL^*u) dx d\tau = \int_{\partial D_t} (z_x u - z u_x) d\tau + uz dx$$

donde L representa el operador del calor y L^* el operador del calor adjunto.

Las fórmulas (2.3), (2.4) y (2.5) se obtienen tomando z solución del problema (1.2) y $u = 1$, $u = x$ y $u = x^2$ respectivamente.

Otras relaciones del mismo tipo se pueden obtener usando polinomios de mayor orden para $u(x, t)$.

Las propiedades más importantes del problema (1.2) son enunciadas en la siguiente proposición.

Proposición 2.1 Si (T, s, z) es solución del problema (1.2), entonces:

- (i) $z \leq 0$ en D_T .
- (ii) $s(t)$ es una función decreciente en $(0, T)$.
- (iii) Si $h'(x) \geq 0$ y $\dot{g}_0(t) \leq 0$, luego $z_x(x, t) \geq 0$ en D_T .

(iv) Si $h(x) = c - 1$, con $c = \text{constante}$, para $0 \leq x \leq 1$, y $g_0(t) > c - 1$ para $t > 0$, entonces el problema (1.2) no tiene solución.

Demostración 2.1 (i), (ii) y (iii) se obtienen de la aplicación del Principio del máximo.

(iv) Para cualquier solución (T, s, z) de problema (1.2), se satisface $0 \leq s(t) \leq 1$ y $0 \leq t \leq T$, y por el principio del máximo resulta $z(x, t) > c - 1$ en D_T , luego de (2.4) se obtiene

$$\frac{s^2(t) - 1}{2} < \frac{c - 1}{2} - (c - 1) \frac{s^2(t)}{2}$$

es decir, $\frac{(s^2(t) - 1)}{2} c < 0$, lo que es una contradicción junto a $c < 0$ y $s(t) \leq 1$.

Observación:

Un resultado general de no existencia se puede ver en [5]. Una condición suficiente de no existencia está dada por $h \leq -1$ en el entorno izquierdo de $x = 1$, independientemente del comportamiento de la temperatura de contorno $g = g_0(t)$ en $x = 0$.

Proposición 2.2 Si (T, s, z) es solución del problema (1.2) y

$$h(x) \geq m(g_0)(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.6)$$

luego

$$z(x, t) \geq m(g_0)(1 - x) \text{ en } D_T \quad (2.7)$$

$$\frac{s^2(t)}{2} [1 + m(g_0)] - m(g_0) \frac{s^3(t)}{3} \leq \frac{1}{2} + \int_0^t g_0(\tau) d\tau + \int_0^1 x h(x) dx \quad 0 < t < T \quad (2.8)$$

donde $m(g_0) = \min_{0 \leq t \leq T} g_0(t)$.

Demostración 2.2 (i) Definimos la función

$$W(x, t) = m(g_0)(x - 1) \text{ en } D = \{(x, t) / 0 < x < 1, 0 < t < T\}$$

comparando W con z y usando el Principio del máximo se obtiene (2.7). Usando (2.4) se obtiene (2.8).

En lo que sigue procederemos a caracterizar los casos (A), (B) y (C) dependiendo de los valores de $R(t)$ donde

$$R(t) = \frac{1}{2} + \int_0^1 x h(x) dx + \int_0^t g_0(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

observamos que $\dot{R}(t) = g_0(t)$.

Proposición 2.3 *Se tienen las siguientes implicaciones:*

$$(i) \text{ caso (B)} \Rightarrow R(T_B) = 0$$

$$(ii) \text{ caso (B)} \Rightarrow \int_0^{T_B} z_x(0, \tau) d\tau = 1 + \int_0^1 h(x) dx$$

$$(iii) \text{ caso (B)} \Rightarrow 2 \int \int_{D_{T_B}} z(x, \tau) dx d\tau = -\frac{1}{3} - \int_0^1 x^2 h(x) dx$$

Demostración 2.3 *Debido a la Proposición (2.2) podemos tomar límite para $t \rightarrow T_B$ en (2.3), (2.4) y (2.5) y obtener las tres relaciones de arriba.*

Proposición 2.4 *Asumiendo que $h(x)$ satisface:*

Existe una constante positiva H tal que

$$h(x) \geq H(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.10)$$

y sea (T, s, z) una solución del problema (1.2) tal que

$$s_T = \inf_{t \in (0, T)} s(t) > 0. \quad (2.5)$$

Además que existan dos constantes $d \in (0, s_T)$, $z_0 \in (0, 1)$ tal que $Hd \leq z_0 \ln 2$ y $z(s(t) - d, t) \geq -z_0$, $0 \leq t \leq T$; luego

$$\dot{s}(t) \geq \min \left[\frac{-H}{z_0}, \frac{\ln(1-z_0)}{d} \right] \quad (2.11)$$

Demostración 2.4 *Es del mismo tipo que la del Lema (2.4) en [3].*

Corolario 2.1 Si ocurre caso (C), entonces la isoterma $z = -1$ existe y alcanza la frontera libre en $t = T_C$.

Proposición 2.5 Sea (T, s, z) una solución del problema (1.2).

Si $R(T_B) = 0$ y $-1 \leq m(g_0) \leq 0$, entonces la solución pertenece al caso (B).

Demostración 2.5 Reemplazamos $R(T_B) = 0$ en (2.8) de la Proposición (2.2), luego obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{s^2(T_B)}{2}(1 + m(g_0)) - m(g_0) \frac{s^3(T_B)}{2} \leq 0.$$

Como $1 + m(g_0) \geq 0$ y $m(g_0) \leq 0$, resulta $s(T_B) = 0$ lo que implica caso (B).

Proposición 2.6 Si (T, s, z) es solución del problema (1.2), con $g_0 \in L^1(0, \infty)$, h verifica la inecuación (2.6) y la solución pertenece al caso A, entonces:

$$R(t) \geq 0, \quad t > 0 \quad (2.12)$$

Demostración 2.6 Usando la inecuación (2.4) y las hipótesis se obtiene la siguiente

inecuación:

$$-\int_0^{s(t)} x z(x, t) dx \leq \|g_0\|_1 + m(g_0) \int_0^1 x(x-1) dx = \|g_0\|_1 - \frac{1}{6} m(g_0) \equiv C,$$

donde $C \geq 0$.

De las inecuaciones anteriores se concluye

$$\int_0^{s(t)} x^2(-z(x, t)) dx \leq \int_0^{s(t)} x(-z(x, t)) dx \leq C.$$

Reemplazando la inecuación anterior en (2.5) obtenemos:

$$2 \int_0^t d\tau \int_0^{s(\tau)} z(x, \tau) dx d\tau \geq -C - \frac{1}{3}, \quad t \geq 0 \quad (2.13)$$

Supongamos entonces que exista un T_0 tal que $R(T_0) < 0$, luego de (2.4), se sigue que

$$\int_0^{s(t)} -z(x,t) dx \geq \int_0^{s(t)} -x z(x,t) dx = \frac{s^2(t)}{2} - R(t) \geq -R(T_0) > 0, \quad t \geq T_0.$$

Si integramos con respecto al tiempo la última inecuación, resulta

$$\int \int_{D_t} z(x,t) dx dt \leq R(T_0)t, \quad t \geq T_0$$

lo que contradice (2.13).

Proposición 2.7 Si (T, s, z) es una solución del problema (1.2) y la función h y g_0 satisfacen las siguientes hipótesis

- (i) $h = h(x) \leq 0$ es una función creciente en $[0,1]$;
- (ii) $g_0 = g_0(t) \leq 0$ es una función decreciente, $t \geq 0$;

entonces si la solución pertenece al caso (C), luego $R(T_C) \leq 0$.

Demostración 2.7 De la Proposición (2.1) tenemos $z_x(x,t) \geq 0$ en D_T . Del Corolario (2.1), la isoterma $z = -1$ debe alcanzar la frontera libre en $t = T_C$, luego el dominio D_T queda dividido en dos regiones y $z(x,t) \leq -1$ a la izquierda de la isoterma $z = -1$.

Reemplazando esta estimación en (2.4) obtenemos

$$\frac{s^2(T_C) - 1}{2} \geq \int_0^1 x h(x) dx + \int_0^{T_C} g_0(\tau) d\tau + \int_0^{s(T_C)} x dz$$

es decir
$$\frac{s^2(T_C)}{2} \geq R(T_C) + \frac{s^2(T_C)}{2}.$$

Luego
$$R(T_C) \leq 0.$$

Observación:

Las hipótesis de la Proposición anterior pueden ser debilitadas, ver Corolario (2.9) en [6].

Corolario 2.2 Si $R(t) > 0$ para todo $t > 0$, entonces la solución (T, s, z) pertenece al caso (A).

Observación:

De la misma manera hecha en esta sección, se pueden obtener resultados análogos para la fase del sólido sobrecalentado.

3 El caso $g_0(t) = \text{constante}$

En esta sección vamos a considerar el caso en el cual la temperatura $z(0, t)$ es constante para todo tiempo, digamos $g_0(t) = -B$, con $B > 0$ y temperatura inicial $h = h(x) \equiv 0$.

Observación 1:

Recordemos que en el cambio de variables hecho en el problema (1.1) para obtener el problema (1.2) adimensionalizado

$$g_0(t) = \frac{c}{l} \Psi(t) \quad \text{donde } c \text{ es el calor específico y } l \text{ el calor latente de fusión.}$$

Con lo cual si estamos en el caso de temperatura constante en el borde $x = 0$

$$B = \frac{c}{l} \Psi_0 \quad \text{donde } \Psi_0 = \text{constante}$$

al coeficiente B se lo denomina número de Stefan.

Observación 2:

Como consecuencia de la Proposición (2.7) en este caso no existe solución global, con lo cual solamente se observará comportamiento del tipo caso (B) o caso (C).

Más aún, uno puede probar fácilmente que la solución para un dado $B > 0$, existe para todo $t \leq T$ con $T \geq \frac{1}{2B}$.

Proposición 3.1 Sea (T, s, z) una solución del problema (1.2). Si $0 \leq B \leq 1$, entonces la solución pertenece al caso (B).

Demostración 3.1 Usando el Principio del máximo se sigue $z(x, t) \geq -1$. De la Proposición (2.4) el caso (C) es excluido, luego sólo el caso (B) es posible.

Proposición 3.2 Sea (T, s, z) una solución del problema (1.2) luego

$$z(x, t) \geq -B \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right), \quad \text{en } D_T \quad (3.14)$$

Demostración 3.2 Se sigue del Principio del máximo aplicado a $z(x, t) = -W(x, t)$, aquí W es la solución de la ecuación del calor en el primer cuadrante $x > 0$, $t > 0$, con las siguientes condiciones de contorno: $W(x, 0) = 0$, $x > 0$ y $W(0, t) = -B$, $t > 0$.

La solución $W(x, t)$ tiene la siguiente forma:

$$W(x, t) = -B \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right), \quad x \geq 0, t \geq 0.$$

Como consecuencia de la Proposición (3.2), se obtienen las siguientes estimaciones sobre B para el caso (C).

Proposición 3.3 Sea (T, s, z) una solución del problema (1.2). Luego, $B \leq \frac{\pi}{2}$ es una condición necesaria para que la solución pertenezca al caso (B).

Demostración 3.3 De la Proposición (3.2) se deduce

$$z_x(0, t) \geq W_x(0, t) = \frac{B}{\sqrt{\pi t}} \quad (3.15)$$

Si reemplazamos la estimación anterior en (2.4) se obtiene

$$1 \geq \frac{B}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/2B} \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = \sqrt{\frac{2B}{\pi}}.$$

Proposición 3.4 La frontera libre satisface las siguientes inecuaciones:

$$s(t) \geq \sqrt{1 - 2Bt}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2B}$$

$$s(t) \leq \frac{1 - 2B\sqrt{(t/\pi)}}{1 - B}, \quad t \geq 0, 0 < B < 1$$

$$s(t) \leq \frac{\sqrt{1 - 2Bt}}{\sqrt{1 - B}}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2B}, 0 < B < 1$$

Demostración 3.4 La primera y la última inecuación se obtienen reemplazando $z \leq 0$ y $z \geq -B$, respectivamente en (2.4); la segunda se obtiene reemplazando $z \geq -B$ y (3.15) en (2.9).

4 Solución explícita

Denominaremos problema P_B al problema (1.2) para $g_0(t) = -B$, B constante $B > 0$ y temperatura inicial $h = h(x)$.

Vamos a dar una solución explícita al problema cuando $\dot{s}(0) < 0$.

Proposición 4.1 El triplete (T, s, z) definido por $z(x, t) = \phi\left(\frac{x}{s(t)}\right)$, $0 < x < s(t)$,

$0 < t < T$, es solución del problema P_B si y sólo si ϕ satisface

$$\phi(\zeta) = -B + \frac{B}{F(\zeta)} F(\eta\zeta)$$

donde $\eta > 0$ es una solución de la ecuación

$$G(x) = \frac{B}{2}, \quad x > 0$$

$$G(x) = x \exp(-x^2) F(x) \quad \text{con} \quad F(x) = \int_0^x e^{\tau^2} d\tau$$

Más aún, en este caso tenemos

$$s(t) = \sqrt{1 - 4\eta^2 t} = 2\eta\sqrt{T - t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$T = \frac{1}{4\eta^2}$$

$$\dot{s}(0) = -2\eta^2 < 0$$

$$h(x) = \phi(x), \quad 0 < x < 1$$

Demostración 4.1 La función $\phi = \phi(\zeta)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial

$$\phi''(\zeta) + \dot{s}(0)\zeta\phi'(\zeta) = 0, \quad \phi(0) = -B, \quad \phi(1) = 0$$

Observaciones:

La ecuación $G(x) = \frac{B}{2}$, $x > 0$, tiene solución si y sólo si,

$$0 < B \leq 2G_M \cong 1.29 = 2 \max_{x>0} G(x).$$

Si $0 < B \leq 1$, el número x es único.

Si $1 < B < 2G_M$ existen dos soluciones (ver Gráfico 1).

Proposición 4.2 Si elegimos un parámetro $\eta \geq 0$, podemos definir la siguiente familia de funciones:

$$z(x,t) = -2G(\eta) \left[1 - \frac{F\left(\eta \frac{x}{s(t)}\right)}{F(\eta)} \right], \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T$$

$$s(t) = \sqrt{1 - 4\eta^2 t}, \quad 0 < t < T = \frac{1}{4\eta^2}$$

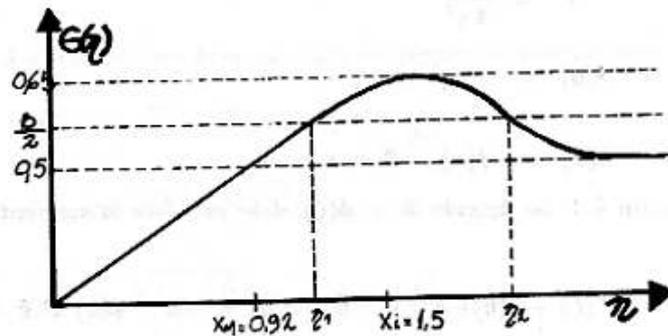
$$B = 2G(\eta)$$

$$h(x) = -2G(\eta) \left[1 - \frac{F(\eta x)}{F(\eta)} \right], \quad 0 < x < 1$$

que es solución del problema de Stefan para el líquido sobreenfriado (P_B).

Más aún, la solución pertenece al caso (B).

Gráfico 1:



5 Referencias

- [1] M. Primicerio 'Problemi di diffusione a frontiera libera' Bolletino UMI, (5) 18-A (1981), 11-68.
- [2] D. Tarzia 'A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation', Firenze 1988.
- [3] A. Fasano - M. Primicerio 'New results on some classical parabolic free-boundary problems' Quart. Appl. Math., 38 (1981), 439-460.
- [4] B. Sherman 'General one-phase Stefan problems and free-boundary problems for the heat equation with Cauchy data prescribed on the free-boundary" SIAM Jour. Appl. Math., 20 (1971), 555-570.
- [5] A. Fasano - M. Primicerio 'A critical case for the solvability of Stefan-like problems' Math. Meth. Appl. Sci., 5 (1983), 84-96.
- [6] A. Petrova - D. Tarzia - C. Turner 'The one-phase supercooled Stefan problem with temperature boundary condition' (por aparecer en Advance Science Math. Appl.)

Los resultados enunciados en este trabajo forman parte de la publicación [6] en conjunto con D. Tarzia y A. Petrova.

Cristina Vilma Turner
Fa.M.A.F
U.N.C