UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA
SAN JUAN BOSCO

FACULTAD DE INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

NOTAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Dr. Jorge A. Vargas

Prof. Ana María Teresa Lucca

Ciudad Universitaria - Km. 4 - (9000) Comodoro Rivadavia - Chubut
☎ Tel/Fax (0967) 28836

1994

Prefacio

Estas notas son el resultado de un curso dictado en la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco en el primer semestre de 1993. Estuvo dirigido a estudiantes de profesorados que en el futuro probablemente dicten cursos de matemática para estudiantes de ingeniería u otras carreras.

El énfasis del curso es en destacar puntos conceptuales que usualmente no se cubren en cursos básicos. Por eso hemos tratado bastante en detalle los temas : Dominio maximal de soluciones, Teoremas de comparación de Sturm. Desde hace décadas el álgebra lineal ha mostrado ser una herramienta adecuada en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Hemos tratado de enfatizar este punto de vista y mostrado en los anexos cómo ayuda en problemas numéricos. Los temas Sistemas de ecuaciones lineales y Ecuación lineal de orden n han sido tratados en forma independiente para que puedan ser utilizados de esta forma. Nos permitimos puntualizar que un complemento a estas notas es el libro de Balanzat, Matemática avanzada para la física, de Eudeba.

Jorge Vargas.

BIBLIOGRAFIA

Análisis numérico; Burden, Faires; Grupo Editorial Iberoamericana

Ecuaciones diferenciales; C. de Jesús Pita Ruiz; Limusa

Ecuaciones diferenciales; Simmons, Robertson; McGraw-Hill

Ecuaciones diferenciales aplicadas; Spiegel; Prentice Hall Hispanoamericana

Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones; M. Braun; Grupo Editorial Iberoamericana

Matemática avanzada para la física; Balanzat; Eudeba

Ordinary Differential Equations; Birkhoff, Rota; John Wiley and Sons

Ordinary Differential Equations; E. L. Ince; Dover Publications, Inc.

INDICE

ANEXO II : INTEGRACION NUMERICA EN BASIC

UNIDAD I : ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

1. INTRODUCCION.

Se entiende por **ecuación diferencial** cualquier ecuación en la cual intervienen una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Muchas leyes de la naturaleza, en física, química, biología o astronomía, encuentran su expresión más natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Son asimismo abundantes sus aplicaciones en la propia matemática, especialmente en geometría, y también en ingeniería, economía, así como en otros muchos campos de las ciencias aplicadas.

Es fácil comprender la razón que se oculta tras tan amplia gama de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. El lector recordará que si $y = f(x)$ es una función dada, su derivada representa la velocidad de cómo y varía con respecto a x. En cualquier proceso natural, las variables involucradas y sus variaciones están relacionadas entre sí a través de los principios básicos que gobiernan dicho proceso. Al expresar tal conexión en símbolos matemáticos el resultado es una ecuación diferencial.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales son :

$$\frac{dy}{dt} = -k\,y \qquad (1)$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -k\,y \qquad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} + 2\,x\,y = e^{-x^2} \qquad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\,\frac{dy}{dx} + 6\,y = 0 \qquad (4)$$

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p (p + 1) y = 0 \qquad (5)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2) y = 0 \qquad (6)$$

En cada una de ellas la variable dependiente es y, mientras que la variable independiente es x o t. Las letras k, m, p representan constantes. Una **ecuación diferencial ordinaria** es una en la que sólo hay una variable independiente, de manera que todas las variables que aparecen en ella son derivadas ordinarias. Todas las que acabamos de citar son ordinarias. El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que contiene. Las ecuaciones (1) y (3) son de primer orden, y las demás son de segundo. Las ecuaciones (5) y (6) son clásicas, y se conocen como **ecuación de Legendre**, y **ecuación de Bessel**, respectivamente. Ambas representan una extensa literatura y una larga historia que se remonta a siglos atrás. Estudiaremos todas estas ecuaciones más adelante.

En esta unidad centraremos nuestra atención en las ecuaciones diferenciales de primer orden y las reducibles a ellas. Nuestros problemas serán los siguientes :

1) Dada una función $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *encontrar* todas las funciones definidas en algún intervalo, digamos $y : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$y'(x) = F(x,y(x)) \quad , \quad \forall\, x \in (a,b) .$$

2) Dada la función $G(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *encontrar* todas las funciones $y : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$G(x,y(x),y'(x)) = 0 \quad , \quad \forall\, x \in (a,b) .$$

Parte del problema, con el tiempo, fue definir qué quería decir *encontrar* las funciones. Seamos un poco más explícitos, para clarificar lo que pretendemos decir :

1. Introducción.

La más simple de las ecuaciones diferenciales es

$$\frac{dy}{dt} = f(x) \qquad (7)$$

La resolvemos escribiendo

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C\ . \qquad (8)$$

En ciertos casos, la integral indefinida en (8) puede hallarse por los métodos del cálculo. En otras ocasiones puede ser difícil o incluso imposible hallar una fórmula para esa integral. Se sabe, por ejemplo, que

$$\int \exp(-x^2)\,dx\ ,\ y\ \int (\mathrm{sen}\ x)/x\,dx$$

no son expresables mediante un número finito de funciones elementales. No obstante, si recordamos que

$$\int f(x)\,dx$$

no es sino un símbolo para una función cualquiera con derivada f(x), podemos dar siempre un significado válido escribiéndola en la forma

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C\ . \qquad (9)$$

La clave de esto es que esta integral definida es función de su límite superior x (la t es tan sólo una variable muda), que existe siempre que el integrando sea continuo sobre el intervalo de integración.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO : Sea la función $g(x)$ continua en el intervalo $a \le x \le b$, y la ecuación diferencial $y' = g(x)$. Dado un número c, existe una y sólo una solución $f(x)$ de la ecuación diferencial en el intervalo tal que $f(a) = c$. Esta solución está dada por la integral definida

$$f(x) = c + \int_a^x g(t)\,dt\quad ,\quad c = f(a)\ . \qquad (10)$$

Este resultado básico sirve como modelo de formulaciones rigurosas en diversos aspectos. Primero, especifica la región en consideración como una faja vertical $a \le x \le b$ en el plano xy. Segundo, describe en términos precisos la clase de funciones $g(x)$ considerada. Por último, afirma la **existencia** y **unicidad** de la solución, dada la *condición inicial* : $f(a) = c$.

Las condiciones enunciadas facilitan la resolución de una ecuación diferencial de la forma $y' = g(x)$ por inspección : para cualquier a , una solución es la función

$$\int_a^x g(t)\ dt\ ;$$

las restantes son obtenidas adicionando una constante arbitraria C a la solución *particular*.

Así, las soluciones de $y' = \exp(-x^2)$ son las funciones

$$y = \int \exp(-x^2)\ dx = (\sqrt{\pi}/2)\ \mathrm{erf}\ x + C\ ;$$

las de $x\,y' = \mathrm{sen}\ x$ son las funciones

$$y = \mathrm{Si}(x) + C\ ;$$

y así siguiendo. Nótese que, al dibujar en el plano x,y las soluciones de $y' = g$ a partir de una curva solución de $y' = g(x)$, las otras se obtienen por las traslaciones verticales

$$(x,y) \longrightarrow (x,y+C),$$

aplicadas a $(x,g(x))$. Así, las soluciones forman una familia uniparamétrica de curvas, una por cada valor del parámetro C. Este hecho geométrico está ilustrado en la Figura 1.1

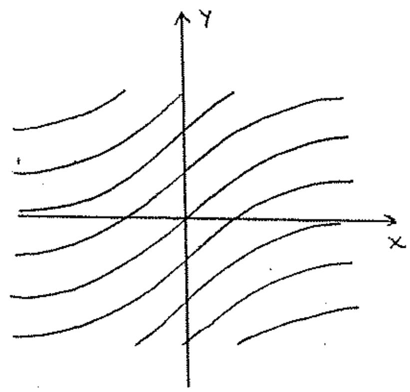


Fig. 1.1.

Inmediatamente después de $y' = f(x)$, el tipo más simple de ecuación diferencial es $y' = g(y)$. Una ecuación tal es invariante respecto de la traslación horizontal

$$(x,y) \longrightarrow (x+C,y).$$

De ahí, una línea horizontal cualquiera es cortada por todas las curvas solución en el mismo ángulo (tales líneas se dicen isoclinas), y cualquier traslación horizontal $y = \phi(x+C)$ de una curva solución $y = \phi(x)$ es también una curva solución. La ecuación diferencial más familiar de esta forma es $y' = y$. Esta puede ser resuelta reescribiéndose como $dy/y = dx$; integrando obtenemos

$$x = \ln|y| + C, \text{ o bien } y = \pm \exp(x-C),$$

donde C es una constante arbitraria. Tomando $k = \pm \exp(-C)$, tenemos la solución general

$$y = k \exp(x) ,$$

pero la solución $y \equiv 0$ es ***perdida*** hasta el último paso.

EJEMPLO : Un procedimiento similar puede ser aplicado a una ecuación diferencial de la forma $y' = g(y)$. Así, consideremos

$$y' = y^2 - 1 . \qquad (11)$$

Puesto que $y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$, las funciones constantes

$$y \equiv -1 \quad , \quad y \equiv 1$$

son soluciones particulares de (11). Puesto que $y^2 > 1$ si $|y| > 1$, mientras que $y^2 < 1$ si $|y| < 1$, todas las soluciones son funciones decrecientes en la franja $|y| < 1$, y funciones crecientes fuera de ella (ver Figura 1.2).

Usando la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right]$$

uno puede reescribir (11) como

$$2\,dx = \frac{dy}{y-1} - \frac{dy}{y+1}$$

de lo cual obtenemos, integrando,

$$2\,(x - C) = \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right|$$

o bien

$$\pm \exp(2(x-C)) = \frac{y-1}{y+1}$$

que se reduce después de algunas manipulaciones a

$$y(x) = \frac{1 \pm \exp(2(x-C))}{1 \mp \exp(2(x-C))} = \begin{cases} \mathrm{tgh}(C-x) \\ \mathrm{cotgh}(C-x) \end{cases} \qquad (11')$$

Este procedimiento ***pierde*** las soluciones especiales

$$y \equiv 1, \; y \equiv -1,$$

pero da todas las otras. Nótese que si $y = f(x)$ es una solución de (11), entonces lo es también $1/y = 1/f(x)$, como puede ser verificado directamente de (11).

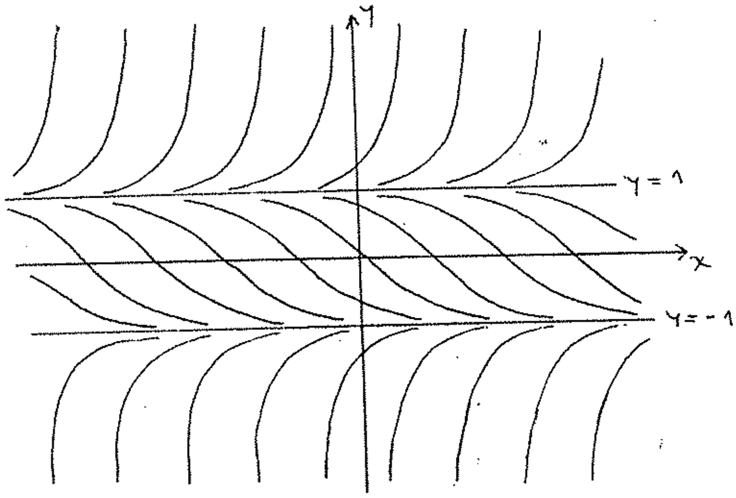


Fig. 1.2.

EJEMPLO : Una ecuación diferencial más complicada es tratable por el mismo método, a saber :

$$y' = y^3 - y.$$

Puesto que $y^3 - y = y\,(y+1)\,(y-1)$, las funciones constantes $y \equiv 0$,

$y \equiv -1$, $y \equiv 1$ son soluciones particulares. Dado que $y^3 > y$ si $-1 < y < 0$ o $1 < y$, mientras que $y^3 < y$ si $0 < y < 1$, todas las soluciones son funciones crecientes en la franja $-1 < y < 0$, $y > 1$ y decrecientes en el resto. Para hallar las restantes soluciones, reemplazamos la ecuación diferencial dada por su recíproca,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^3 - y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1} - \frac{2}{y}\right]$$

Esta ecuación diferencial puede ser integrada término a término dando, al cabo de algunas manipulaciones,

$$x = (1/4)\ \ln\left|\ 1 - y^{-2}\right| + C$$

o bien

$$y(x) = \pm\left(\ 1 \mp \exp(2x-k)\ \right)^{-1/2}\ ,\ k = 2C\ .$$

La labor de dibujar curvas solución de las ecuaciones diferenciales anteriores es reducido no sólo por sus traslaciones horizontales, sino por el uso de otras simetrías. Así, las ecuaciones diferenciales $y' = y$, e $y' = y^3 - y$ son invariantes respecto de la reflexión en el eje x (es decir, $(x,y) \to (x,-y)$). De ahí, también son ellas curvas solución. Asimismo, las ecuaciones diferenciales $y' = 1 + y^2$ e $y' = y^2 - 1$ (y sus curvas solución) son invariantes respecto de $(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$ (esto es respecto de la rotación de 180° alrededor del origen). Esta simetría es visible en la Figura 1.2.

PROBLEMAS.

1. Completar la siguiente tabla :

Ecuación diferencial	Ordinaria o parcial	Orden	Variables independientes	Variables dependientes
$y' = x^2 + 5y$				

$y'' - 4y' - 5y = e^{3x}$				
$\frac{\partial U}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y}$				
$\frac{dr}{d\phi} = \sqrt{r\,\phi}$				
$\frac{d^2x}{dy^2} - 3x = \text{sen } y$				
$(2x + y)dx + (x - 3y)dy$				
$y'' + xy = \text{sen } y'''$				
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$				

2. Demostrar que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes :

a) $y = e^x \text{ sen } x$ de $y'' - 2y' + 2y = 0$

b) $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} + c_3 \cos \alpha x + c_4 \text{ sen } \alpha x$ de $y^{iv} = \alpha^4 y$

c) $xy - \ln y = 1$ de $y^2 + (xy - 1)\,y' = 0$

d) $y = e^x \int_0^x e^{t^2}\, dt + C\, e^x$

e) $\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$, de $y = (y')^2 + 2 (y')^3$.

3. Verificar que :

Si $y(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ entonces $2 y' y''' = 3 (y'')^2$. Además, si ocurre que $a + d = 0$, entonces $(y - x) y'' = 2y (1 + y')$.

4. Encontrar la ecuación diferencial de las familias :

a) $y = A x^m + B x^n$,

b) $y = A e^{mx} + B e^{nx}$

c) $y = A \cos nx + B \operatorname{sen} nx$

d) $y = A \cosh (x/A)$

e) $y = e^{mx} (A + Bx)$

5. *a*) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de rectas de pendiente 1 y ordenada al origen *c* .

b) Hallar la ecuación diferencial de la familia de rectas de pendiente *c* y ordenada al origen 1 .

6. *a*) Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de centro fijo en el origen y radio arbitrario.

b) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio fijo y centro arbitrario.

c) Demostrar que la ecuación diferencial de todas las circunferencias del plano es

$$[1 + (y')^2] y''' - 3 y' (y'')^2 = 0 .$$

2. SEPARACION DE VARIABLES.

Una ecuación diferencial que se reduce a la forma

$$y' = \frac{f(x)}{h(y)} \qquad (12)$$

se dice de **variables separables**. Formalmente se procede como sigue

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)} \qquad \Rightarrow \quad h(y)\,dy = f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{y_o}^{y} h(y)\,dy = \int_{x_o}^{x} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \phi(y) = \psi(x)$$

Despejando $y(x)$ se obtiene la solución buscada.

Con un poco más de cuidado, el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que $\psi(x) = \int f(x)\,dx$ existe, y es diferenciable y continua en cualquier intervalo donde $f(x)$ esté definida, mientras que $\phi(y) = \int h(y)\,dy$ verifica lo mismo. Bajo estas condiciones, la solución está definida, por el Teorema de la función inversa, por la fórmula

$$y(x) = \phi^{-1}(\psi(x) + C). \qquad (13)$$

EJEMPLO :

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)\,dx = -xy\,dy.$$

Las variables son separables, así :

$$\frac{x^2 + 1}{-x}\,dx = \frac{y}{y^2 - 1}\,dy$$

Integrando,

$$\int \frac{x^2 + 1}{-x}\,dx = \int \frac{y}{y^2 - 1}\,dy$$

$$-\frac{x^2}{2} - \ln x = \frac{1}{2}\ln(y^2 - 1) + C$$

$$e^{-x^2}\frac{1}{x^2} = C\ (y^2 - 1)$$

$$y^2 = \frac{e^{-x^2}}{Cx^2} + 1$$

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{e^{-x^2}}{Cx^2} + 1}$$

o bien, reemplazando $1/C$ por C :

$$y(x) = \pm\sqrt{C\,\frac{e^{-x^2}}{x^2} + 1}\ .$$

Por tanto, esto estará definido en un intervalo que depende del valor de la constante, digamos que estará definido para los $x \in [a_C, b_C]$.

Si $C \geq 0$, $[a_C, b_C] = (-\infty, \infty)$.

Si $C < 0$, $-C > 0$, entonces se dan las siguientes posibilidades

i) $0 < \exp(-x^2)/x^2 < 1$ y $0 < -C < 1 \Rightarrow 0 < -C\exp(-x^2)/x^2 < 1$

$$\Rightarrow 1 + C\exp(-x^2)/x^2 > 0$$

$$\Rightarrow [a_C, b_C] = (-\infty, \infty).$$

ii) $0 < \exp(-x^2)/x^2 < 1$ y $-C > 1 \Rightarrow \exp(-x^2)/x^2 < -C$

$$\Rightarrow C\exp(-x^2)/x^2 > -C^2$$

$$\Rightarrow 1 + C\exp(-x^2)/x^2 > 1 - C^2$$

$$\Rightarrow 1 + C\exp(-x^2)/x^2 > 0 \text{ si } C = -1$$

En ese caso, $y(x) = \pm \sqrt{\dfrac{e^{-x^2}}{x^2} + 1}$, y $[a_c, b_c] = (-\infty, \infty)$.

En adición, $x \equiv 0$, $y \equiv 1$, $y \equiv -1$ son soluciones reales de la ecuación dada. Las dos últimas, pero no la primera, están incluídas en la solución general. Esto nos dice que debemos ser cuidadosos, pues la técnica puede no dar todas las soluciones.

Otro modo de analizar una ecuación diferencial de variables separables es: escribirla en la forma

$$y' = g(x)\ h(y). \tag{14}$$

En este caso una transformación obvia es

$$\frac{dy}{h(y)} - g(x)\ dx = 0 \ .$$

Integrando, vemos que la función

$$u(x,y) = \int g(x)\ dx - \int \frac{dy}{h(y)}$$

es una integral de la ecuación diferencial (14). El Teorema Fundamental del Cálculo asegura que $\phi(x) = \int g(x)\ dx$ existe y es diferenciable en el intervalo donde $g(x)$ está definida y es continua, mientras que $\psi(y) = \int dy / h(y)$ existe y es *estrictamente monótona* en cualquier intervalo (y_1, y_2) entre ceros sucesivos y_1 e y_2 de $h(y)$, en el cual asumimos que es continua. De ahí, la ecuación

$$\psi(y) - \phi(x) = \int \frac{dy}{g(y)} - \int h(x)\ dx = C \tag{15}$$

brinda para cada C una solución de $y' = g(x)h(y)$ en la franja $y_1 < y < y_2$. Cerca de cualquier x con $y_1 - C < \phi(x) < y_2 - C$, esta solución está definida, por el Teorema de la función inversa, por la fórmula $y(x) = \psi^{-1}(\phi(x) + C)$.

En un principio, encontrar la solución de una ecuación diferencial era hallar la solución explícita. Después del Teorema de la función implícita se cambió el hecho de *encontrar* la solución, hallándola sin explicitarla necesariamente.

PROBLEMAS.

En cada uno de los problemas 1 a 5, obtener la solución general de la ecuación dada :

1) $(1 + t^2) \frac{dy}{dt} = 1 + y^2$.

[Sugerencia : $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$]

2) $\frac{dy}{dt} = (1 + t)(1 + y)$

3. Ecuaciones que se reducen a una de variables separables.

3) $\frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2$

4) $\frac{dy}{dt} = e^{t+y+3}$

5) $\cos y \operatorname{sen} t \frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} y \cos t$

En cada uno de los problemas 6 a 10 resolver el problema de valor inicial dado y determinar el intervalo de existencia de cada solución.

6) $t^2(1 + y^2) + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \quad ; \quad y(0) = 1$

7) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y + yt^2} \quad ; \quad y(2) = 3$

8) $(1 + t^2)^{1/2} \frac{dy}{dt} = ty^3(1 + t^2)^{-1/2} \quad ; \quad y(0) = 1$

9) $\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(y - 1)} \quad ; \quad y(0) = -1$

10) $\cos y \frac{dy}{dt} = \frac{-t \operatorname{sen} y}{1 + t^2} \quad ; \quad y(1) = \pi/2$

En los ejercicios 11 a 16 encontrar las trayectorias ortogonales a la familia dada de curvas.

11) $y = cx^2$

12) $y^2 - x^2 = c$

13) $y = c \operatorname{sen} x$

14) $x^2 + y^2 = cx$

15) $y = c\, e^x$

16) $y = e^{cx}$

3. ECUACIONES QUE SE REDUCEN A UNA DE VARIABLES SEPARABLES.

3. Ecuaciones que se reducen a una de variables separables.

Diremos que una función $P(x,y)$ es una **función homogénea de grado n** si verifica $P(tx,ty) = t^n P(x,y)$, $\forall\ x,\ y,\ t$.

Si P y Q son funciones homogéneas en x e y del mismo grado n, la ecuación diferencial

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad (16)$$

es reducible por la sustitución $y = v\,x$ ($y(x) = v(x)\,x$, usada por primera vez por Leibniz en 1691) a una ecuación de variables separables, pues

$$P(x,y) = P(x,vx) = x^n\,P(1,v)$$

$$Q(x,y) = Q(x,vx) = x^n\,Q(1,v),$$

y de ahí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

se transforma en

$$\frac{x\,dv + v\,dx}{dx} = x\,\frac{dv}{dx} + v = \frac{x^n\,P(1,v)}{x^n\,Q(1,v)}$$

$$x\,\frac{dv}{dx} + v = \frac{P(1,v)}{Q(1,v)}$$

$$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{P(1,v)}{Q(1,v)} - v = \frac{P(1,v) - v\,Q(1,v)}{Q(1,v)}$$

$$\frac{Q(1,v)}{P(1,v) - v\,Q(1,v)}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{Q(1,v)}{P(1,v) - v\,Q(1,v)}\,dv = \ln\,(x) + C \qquad (17)$$

Luego se reemplaza $v = y/x$. Así se obtiene $\Phi(y,x) = \ln(x) + C$ y por último se despeja $y(x)$ de esta última igualdad.

3. Ecuaciones que se reducen a una de variables separables.

EJEMPLO : Consideremos

$$(y^4 - 2x^3y)\, dx + (x^4 - 2xy^3)\, dy = 0$$

Sea $y = vx$, entonces $dy = x\, dv + v\, dx$,

$$(v^4x^4 - 2x^4v + vx^4 - 2x^4v^4)\, dx + (x^5 - 2x^5v^3)\, dv = 0$$

Si $x \neq 0$ resulta

$$(v^4 + v)\, dx - (1 - 2v^3)\, x\, dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - 2v^3}{v^4 + v}\, dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - \frac{3v^2}{1 + v^3} \right) dv$$

De ahí,

$$\ln(x) = \ln(v) - \ln(1 + v^3) + C$$

$$x = C\, \frac{v}{1 + v^3}$$

$$x = C\, \frac{y/x}{1 + (y/x)^3}$$

$$x = \frac{Cyx^2}{x^3 + y^3}$$

$$x^3 + y^3 = Cxy\ .$$

Así, las curvas en $\mathbb{R}^2$ definidas implícitamente por

$$x^3 + y^3 = Cxy$$

son soluciones de la ecuación dada.

Una ecuación del tipo

3. Ecuaciones que se reducen a una de variables separables.

$$\frac{dy}{dx} = F\left[\frac{A\,x + B\,y + C}{a\,x + b\,y + c}\right] \qquad (18)$$

con A, B, C, a, b, c constantes tales que $Ab-aB \neq 0$, se transforma en una de forma homogénea por una transformación lineal de las variables; en efecto, sea

$$x = h + \xi \quad ; \quad y = k + \mu \qquad (19)$$

donde ξ, μ son nuevas variables, y h, k son constantes tales que

$$A\,h + b\,k + C = a\,h + b\,k + c = 0.$$

La ecuación (18) se transforma en

$$\frac{d\mu}{d\xi} = F\left[\frac{A\,\xi + B\,\mu}{a\,\xi + b\,\mu}\right] \qquad (20)$$

de modo que F es una función homogénea de μ, ξ de grado cero. Las constantes h, k pueden ser determinadas dado que $Ab-aB \neq 0$.

Si $Ab-aB = 0$, tomemos μ como una nueva variable dependiente definida por

$$\mu = x + (B/A)\,y = x + (b/a)\,y \qquad (21)$$

entonces

$$\frac{d\mu}{dx} = 1 + \frac{b}{a}\,F\left[\frac{A\,\mu + C}{a\,\mu + c}\right]. \qquad (22)$$

Las variables son ahora separables.

NOTA : Obsérvese que el hecho de que $Ab-aB \neq 0$ significa geométricamente que las rectas $A\,x + B\,y + C = 0$, $a\,x + b\,y + c = 0$ se intersectan, y lo hacen precisamente en el punto (h,k). Cuando $Ab-aB = 0$, las rectas citadas son paralelas (o coincidentes).

EJEMPLO : Consideremos

$$(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0$$

Entonces $h = 1$, $k = 0$. La sustitución $x = \xi + 1$, $y = \mu$ reduce la ecuación a

$$(3\mu - 7\xi)\ d\xi + (7\mu - 3\xi)\ d\mu = 0 .$$

Esta es ahora homogénea; la transformación $\mu = v\xi$ la cambia a

$$(7v - 3)\ \xi\ dv + (7v^2 - 7)\ d\xi = 0,$$

o bien

$$\left[\frac{2}{v - 1} + \frac{5}{v + 1}\right] dv + \frac{7}{\xi}\ d\xi = 0.$$

De ahí,

$$(v - 1)^2\ (v + 1)^5\ \xi^7 = C$$

donde C es la constante de integración. Luego,

$$(\mu - \xi)^2\ (\mu + \xi)^5 = C .$$

La primitiva es, por tanto,

$$(y - x + 1)^2\ (y + x - 1)^5 = C .$$

PROBLEMAS.

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones de t y de y pueden expresarse como funciones de la variable y/t .

a) $\dfrac{y^2 + 2ty}{y^2}$ *b*) $\dfrac{y^3 + t^3}{yt^2 + y^3}$

c) $\dfrac{y^3 + t^3}{t^2 + y^3}$ *d*) $\ln y - \ln t + \dfrac{t + y}{t - y}$

e) $\dfrac{e^{t+y}}{e^{t-y}}$ *f*) $\ln \sqrt{t + y} - \ln \sqrt{t - y}$

3. Ecuaciones que se reducen a una de variables separables.

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

2. $2ty\,\frac{dy}{dt} = 3y^2 - t^2$

3. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

4. $\frac{dy}{dt} = \frac{t + y}{t - y}$

5. $e^{t/y}\,(y - t)\,\frac{dy}{dt} + y\,(1 + e^{t/y}) = 0$

$\left[\text{ Sugerencia : } \int \frac{v - 1}{ve^{-1/v} + v^2}\,dv = \ln\,(1 + ve^{1/v})\right]$.

6. Resolver el problema de valor inicial :

$$t(dy/dt) = y + \sqrt{t^2 + y^2}\ ; \quad y(1) = 0\ .$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales :

7. $(x - y + 3)\,dx + (3x + y + 1)\,dy = 0$

8. $y' = \dfrac{x + 2y - 8}{2x + 4y - 1}$

9. Comprobar, resolviendo la ecuación diferencial, que las soluciones de

$$(3y - 7x + 7)\, dx + (7y - 3x + 3)\, dy = 0$$

están dadas implícitamente por :

$$(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = C\ .$$

Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones.

10. $(1 + t - 2y) + (4t - 3y - 6)\, dy/dt = 0$

11. $(t + 2y + 3) + (2t + 4y - 1)\, dy/dt = 0$

4. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

La ecuación lineal más general de **primer orden** es del tipo

$$y' + b(x)\, y + c(x) = 0, \qquad (23)$$

donde b, c son funciones sólo de x, y continuas en un intervalo abierto I de la recta real. En el caso en que $c \equiv 0$, la ecuación lineal se dice **homogénea**.

NOTA : El término *homogénea* es aplicado a la ecuación lineal cuando no contiene términos independientes de y, y de la derivada de y. Este uso del término debe distinguirse del utilizado en la sección anterior, en la cual la ecuación (en general no lineal) se decía homogénea cuando P y Q eran funciones homogéneas de x e y del mismo grado. De ahí que no se presten a confusión los dos usos del término.

Antes de analizar la ecuación (23), veamos cómo se enunciaría este problema en lenguaje moderno (desde el punto de vista del álgebra lineal). Pensemos en la función $T(y) = y' + b(x)\, y$, definida de $C^{\infty}(I)$ en $C^{\infty}(I)$, espacio de las funciones continuamente diferenciables en el intervalo abierto real I. Se trata de un operador lineal, en virtud de la linealidad de la derivada; esto es,

$$T(y+z) = T(y) + T(z) \quad ; \quad T(\alpha y) = \alpha\, T(y)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$; y, z funciones de $C^{\infty}(I)$.

Resolver la ecuación (23) equivale entonces a probar que la función $-c(x)$ pertenece a la imágen del operador T. Además, hallar las soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y' + b(x)\, y = 0 \qquad (24)$$

equivale a calcular el núcleo del operador T.

Retomemos ahora el análisis de la ecuación lineal (23). Esta es una de las pocas que se puede resolver explícitamente, y para ello se requiere integrar dos veces. Veamos esto con más detalle.

Comenzamos por la ecuación lineal homogénea (24). Sus variables son separables, así

$$\frac{dy}{y} = -\, b(x)\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int b(x)\, dx$$

$$\ln(y) = C - \int b(x)\, dx$$

Luego,

$$y(x) = C \exp\left(-\int b(x)\, dx \right) \qquad (25)$$

son las soluciones de la ecuación $y' + b(x)\, y = 0$, donde C es una constante real arbitraria. La existencia de $y(x)$ está asegurada por la respectiva existencia de la integral (Teorema Fundamental del Cálculo). Con esto hemos probado el siguiente :

TEOREMA : Si b es una función continua en un intervalo abierto (α,β) de $\mathbb{R}$, entonces todas las soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

$$y' + b(x)\ y = 0$$

están dadas por

$$y_c(x) = C\ e^{-\int b(x)\ dx},$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

NOTA : y_c denota que para cada constante arbitraria C se tiene una solución de la ecuación.

Para resolver la ecuación no homogénea (23) la idea es proponer como solución a

$$y(x) = v(x)\ e^{-\int b(x)\ dx} \tag{26}$$

en la cual v, una función de x , reemplaza a la constante en la solución de la ecuación homogénea asociada. Dado que

$$y' = v'\ e^{-\int b(x)\ dx} + v\ (\ -\ b(x)\ )\ e^{-\int b(x)\ dx},$$

la ecuación (23) se transforma en

$$y' + b\ y + c = v'\ e^{-\int b(x)\ dx} + c +$$

$$+ v\left(-b\ e^{-\int b(x)\ dx}\right) + b\ v\ e^{-\int b(x)\ dx} = 0.$$

Los dos últimos sumandos suman cero. De esto, tenemos

$$0 = v'\ e^{-\int b(x)\ dx} + c$$

o sea

$$v' = - c\, e^{\int b(x)\, dx} .$$

En consecuencia

$$v(x) = - \int c(x)\, e^{\int b(x)\, dx}\, dx + K$$

y la solución de la ecuación es

$$y(x) = e^{-\int b(x)\, dx} \left(K - \int c(x)\, e^{\int b(x)\, dx}\, dx \right) . \qquad (27)$$

e involucra dos cuadraturas (o integraciones). Hemos probado así el siguiente:

TEOREMA : Si b, c son funciones continuas en un intervalo abierto (α,β) de $\mathbb{R}$, entonces todas las soluciones de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + b(x)\, y + c(x) = 0$$

están dadas por

$$y_K(x) = e^{-\int b(x)\, dx} \left(K - \int c(x)\, e^{\int b(x)\, dx}\, dx \right) .$$

NOTA : La ecuación es resoluble si aceptamos que sabemos integrar !!

El método aquí adoptado de hallar la solución de una ecuación no homogénea, fijando que la constante de integración C de la solución de una ecuación simple se convierte en función de la variable independiente, y luego determinando éste de manera tal que la ecuación general sea satisfecha, es un caso particular del conocido método de **variación de parámetros**. (La aplicación del método a la ecuación lineal de primer orden se debe a John Bernoulli (1697) pero la solución por cuadraturas fue conocida por Leibnitz varios años antes.)

EJEMPLO : $y' - a\,y = e^{mx}$; a, m constantes.

$$y' - a\,y = 0 \Rightarrow y(x) = C\,e^{ax}$$

$$v(x) = K + \int e^{mX}\, e^{-\int a\,dt}\, dx$$

$$= K + \int e^{mX-aX}\cdot dx$$

De esto,

$$y(x) = \begin{cases} (K + x)\,e^{ax} & \text{si } m = a \\ K + \dfrac{e^{(m-a)x}}{(m-a)} & \text{si } m \neq a \end{cases}$$

4.1. ANALISIS DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION LINEAL HOMOGENEA Y DE LA ECUACION NO HOMOGENEA.

Por el teorema ya enunciado, las soluciones de la ecuación

$$y' + b(x)\,y = 0$$

son de la forma

$$y(x) = K\,e^{-\int b(s)\,ds}$$

donde K es una constante real arbitraria.

i) Si $K \neq 0$, entonces $y(x)$ es distinta de cero para todo x.

ii) Si y_1 , y_2 son soluciones con $y_2 \neq 0$, entonces existe K tal que $y_1 = K\, y_2$ ($K \in \mathbb{R}$). En efecto, esto puede probarse de dos formas :

1) Como y_1, y_2 son soluciones de la ecuación, existen constantes K_1, K tales que

$$y_1(x) = K_1\, e^{-\int b(x)\, dx} \quad ; \quad y_2(x) = K_2\, e^{-\int b(x)\, dx}$$

con $K_2 \neq 0$ por ser $y_2 \neq 0$; basta entonces tomar $K = K_1/K_2$.

2) Como $y_2 \neq 0$, tiene sentido

$$\left(\frac{y_1}{y_2} \right)' = \frac{y_1'\, y_2 - y_1\, y_2'}{y_2^2} = \frac{-\, b\, y_1\, y_2 - y_1\, (-\, b\, y_2)}{y_2^2} = 0 ,$$

pues y_1, y_2 son soluciones de la ecuación. Por tanto, y_1/y_2 es constante, esto es, existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que $y_1/y_2 = K$.

iii) Si $y(x_1) = 0$ para algún x_1 , entonces $y(x) = 0$, para todo x .

$$y(x) = C\, e^{-\int b(x)\, dx}$$

$$y(x_1) = C\, e^{-\int b(x)\, dx} = 0$$

de esto $y(x_1) = 0$. [Recordar $e^{f(x)} \neq 0$ para todo x, cualesquiera sea f].

iv) Es fácil justificar que

$$y(x) = K\, e^{-\int_{x_o}^{x} b(s)\, ds}$$

es la solución de (24), que en x_o vale $K = y_o$, y que

Sea $z = y^{-2}$, entonces $z' = -2\, y^{-3}\, y'$. Con esto en la ecuación,

$$-(1/2)\, z' + (1/x)\, z = x^3$$

que es lineal. Resolviendo la ecuación homogénea asociada

4.2. ECUACION DE BERNOULLI.

La ecuación

$$y' + \phi\, y = \psi\, y^n \qquad (28)$$

en la cual ϕ, ψ son funciones sólo de x es conocida como la **ecuación de Bernoullí** (1695; el método de solución fue descubierto por Leibnitz en 1696).

Esta ecuación puede llevarse a la forma lineal haciendo un cambio de la variable dependiente. Sea

$$z = y^{1-n}, \qquad (29)$$

entonces

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx},$$

y así, si la ecuación de Bernoullí es escrita en la forma

$$y^{-n}\, y' + \phi\, y^{1-n} = \psi$$

resulta

$$\frac{1}{1-n}\, z' + \phi\, z = \psi \qquad (30)$$

la cual es lineal en z . Como se vio en la sección anterior, ésta es resuelta por medio de dos integraciones.

EJEMPLO : Consideremos

$$x\, y' + y = x^4\, y^3 .$$

Si $x \neq 0$, resulta

$$y' + (1/x)\, y = x^3\, y^3 .$$

Sea $z = y^{-2}$, entonces $z' = -2\, y^{-3}\, y'$. Con esto en la ecuación,

$$-(1/2)\, z' + (1/x)\, z = x^3$$

que es lineal. Resolviendo la ecuación homogénea asociada

$$-(1/2)\ z' + (1/x)\ z = 0$$

tenemos $z = K\ x^2$. Consideremos entonces como solución de la ecuación no homogénea $z = x^2\ v$. Así,

$$-(1/2)\ (2xv + x^2v') + xv = x^3$$

Resolviendo obtenemos $-v = x^2 + K$. Por tanto, la solución general de la ecuación lineal es

$$z = -x^2\ (x^2 + K),$$

y la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) = (\ -K\ x^2 - x^4\ )^{-1/2}\ ;\ K < 0.$$

Nótese que la función $y \equiv 0$ también es solución (resulta de $x = 0$).

PROBLEMAS.

Resolver las siguientes ecuaciones :

1. $y' - y = x\ y^2$

2. $y' - y = x\ y^5$

3. $y' + 2xy + xy^4 = 0$

4. $y' + y = y^2(\cos x - \operatorname{sen} x)$

4.3. ECUACION DE RICCATI - D'ALEMBERT .

La ecuación

$$y' + \psi\ y^2 + \phi\ y + \chi = 0 \qquad (\ 31\ )$$

en la cual ψ, ϕ, χ son funciones de x, es conocida como la **ecuación de Riccati generalizada** (Riccati en 1724 investigó la ecuación $y' + a\,y^2 = b\,x^m$ por lo cual su nombre es asociado usualmente. La ecuación generalizada fue estudiada por D'Alembert).

Esta ecuación se distingue de las anteriores en que no es, en general, integrable por cuadraturas. Por ello define una familia de funciones trascendentales que son esencialmente distintas de las trascendentes elementales (Estas últimas son las funciones que se obtienen de las funciones algebraicas por integración, y las inversas de tales funciones. Así, la función logarítmica es definida como $\int_{-1}^{x} s^{-1}ds$; su inversa es la función exponencial).

Más precisamente

TEOREMA : No toda solución de la ecuación (31) se obtiene a partir de ϕ, ψ, χ, funciones exponenciales (e^x), logarítmicas (lnx), u operando con suma, producto, composición, derivación $(\frac{d}{dx})$, o integración de estas funciones.

LEMA : La ecuación de Riccati

$$z' + \psi\,z + \phi\,z^2 = 0 \qquad (32)$$

en la cual ψ, ϕ son funciones de x es equivalente a una ecuación lineal de primer orden, haciendo $z = 1/u$.

<u>Dem:</u> Basta notar que esta ecuación es del tipo de Bernoulli, con $n = 2$. De ahí, haciendo $u = z^{1-2} = z^{-1}$ (o bien $z = 1/u$) se reduce a una ecuación diferencial lineal como sigue :

$$u' = -\,z^{-2}\,z' \quad \text{pero} \quad z^{-2}\,z' + \psi\,z^{-1} + \phi = 0$$

entonces

$$-\,u' + \psi\,u + \phi = 0 \qquad (33)$$

siendo esta ecuación lineal no homogénea.

q.e.d.

PROPOSICION : Si conocemos una solución de la ecuación de Riccati (31), entonces toda otra solución se calcula integrando a lo sumo dos veces.

Dem: Supongamos y_1 una solución particular de la ecuación (31). Sea

$$y = y_1 + z \ . \qquad (34)$$

Entonces la ecuación (31) se transforma en :

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + \psi\,(\,y_1 + z\,)^2 + \phi\,(\,y_1 + z\,) + \chi = 0$$

o bien

$$\frac{dy_1}{dx} + \psi\,y_1^2 + \phi\,y_1 + \chi + \frac{dz}{dx} + 2\,\psi\,y_1\,z + \psi\,z^2 + \phi\,z = 0$$

Como y_1 es solución de (31), el primer término de la izquierda es idénticamente nulo, y tenemos

$$\frac{dz}{dx} + (\,2\,y_1\,\psi + \phi\,)\,z + \psi\,z^2 = 0 \qquad (35)$$

Por el Lema anterior esta ecuación puede reducirse a una ecuación lineal no homogénea haciendo $z = 1/u$. De lo visto en esta Sección resulta lo pedido.

q.e.d.

PROPOSICION : Si conocemos tres soluciones distintas y_1, y_2, y_3 de la ecuación de Riccati (31), toda otra solución y es una función racional de y_1, y_2, y_3. Esto es, para cada solución y , existen polinomios

$$P(x_1, x_2, x_3) \quad y \quad Q(x_1, x_2, x_3)$$

que dependen de y de modo que

$$y(x) = \frac{P(y_1(x), y_2(x), y_3(x))}{Q(y_1(x), y_2(x), y_3(x))} . \qquad (36)$$

Dem: Sean y_1, y_2, y_3 soluciones distintas de (31). Entonces las funciones $y - y_1$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_1$ son soluciones de la ecuación

$$z' + (2 \psi y_1 + \phi) z + \psi z^2 = 0$$

Luego, $u_1 = \dfrac{1}{y - y_1}$, $u_2 = \dfrac{1}{y_2 - y_1}$, $u_3 = \dfrac{1}{y_3 - y_1}$ son soluciones de la ecuación lineal

$$- u' + \psi_1 u + \phi_1 = 0$$

donde $\psi_1 = 2 \psi y_1 + \phi$; $\phi_1 = \psi$.

Pero entonces $u_1 - u_2$, $u_2 - u_3$ resuelven la ecuación lineal homogénea

$$- u' + \psi_1 u = 0.$$

En consecuencia existe una constante real C tal que

$$(u_1 - u_2) = C (u_2 - u_3)$$

Así $u_1 = C \cdot (u_2 - u_3) + u_2$.

En consecuencia,

$$\frac{1}{y - y_1} = C \left(\frac{1}{y_2 - y_1} - \frac{1}{y_3 - y_1} \right) + \frac{1}{y_2 - y_1} \qquad (37)$$

De donde surge que y es una función racional de y_1, y_2, y_3 .

Queda como ejercicio para el lector escribir explícitamente esta expresión.

q.e.d.

PROPOSICION : Si $\psi \neq 0$, la ecuación de Riccati se transforma en una ecuación lineal de segundo orden.

Dem: Como $\psi \neq 0$, sea v una nueva variable dependiente definida por

$$y(x) = \frac{v(x)}{\psi(x)} . \qquad (38)$$

entonces la ecuación (31) se transforma en

$$\frac{dv}{dx} + v^2 + P\,v + Q = 0 \qquad (39)$$

donde $P = \phi - \frac{\psi'}{\psi}$, $Q = \psi\,\chi$.

Ahora hacemos

$$v = \frac{u'}{u} = \ln(u)' \qquad (40)$$

[u existe puesto que $v = h'$, ahora $h = \ln(e^h)$. Sea $u = e^h$]

Un cálculo muestra que u satisface la ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Q\,u = 0 . \qquad (41)$$

que es una ecuación lineal de segundo orden.

q.e.d.

En particular, la ecuación original de Riccati, dada por

$$y' + a\,y^2 - b\,x^m = 0 \qquad (42)$$

donde a, b son constantes, se transforma en

$$u'' - a\,b\,x^m\,u = 0 . \qquad (43)$$

PROBLEMAS.

1. Resolver la ecuación

$$y' = xy^2 - 2y + 4 - 4x$$

notando que $y = 2$ es una solución particular.

2. Resolver $y' + y^2 = 1 + x^2$.

3. Resolver la ecuación $y' = \frac{y^2}{x - 1} - \frac{xy}{x - 1} + 1$ notando que $y = 1$, $y = x$ son soluciones.

4.4. RESOLUCION POR SERIE DE POTENCIAS.

En el siglo 17 o 18 la mayoría de las funciones consideradas eran series de potencias, racionales o exponenciales. Por tanto resultó natural proponer como solución de una ecuación diferencial funciones del tipo

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

y encontrar reglas de cálculo de los a_n .

EJEMPLO : Consideremos $y' = x\, y(x)$.

Proponemos como solución

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Entonces,

$$y'(x) = a_1 + 2\, a_2 x + 3\, a_3 x^2 + \dots\dots + (n+1)\, a_{n+1} x^n + \dots$$

$$x\, y(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots\dots + a_{n-1} x^n + \dots$$

Ahora, recordemos que dos series de potencias son iguales siempre que los coeficientes de cada potencia de x coincidan. Por consiguiente

$a_1 = 0 \quad ; \quad 2\, a_2 = a_0 \quad ; \quad 3\, a_3 = a_1 \; \ldots \; ; \quad (n+1)\; a_{n+1} = a_{n-1}$

Como $a_1 = 0$, se tiene que $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = 0 \ldots$

$$a_2 = (a_0)/2 \quad ; \quad a_4 = (a_2)/4 = (a_0)/(4.2) \quad ; \quad \ldots$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2n}\, a_{2n-2} = \frac{1}{2n(2n-2)}\, a_{2n-4}$$

$$= \frac{1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}\; a_0$$

$$= \frac{1}{2^n\; n(n-1)(n-2)\ldots 1}\; a_0$$

$$= \frac{1}{2^n\; n!}\; a_0 \, .$$

De esto,

$$y(x) = a_0 \left(1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{2^2\; 2!}\, x^4 + \ldots + \frac{1}{2^n\; n!}\, x^{2n} + \ldots \right)$$

$$= a_0\; e^{(x^2/2)} \, .$$

En este caso la serie converge para todo x, e $y(x)$ está definida por la serie para todo x .

EJEMPLO : Consideremos $(1 - x^2)\, y' = y$.
Aquí,

$$y(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n + \ldots$$

$$y'(x) = a_1 + 2\, a_2\, x + \ldots + (n-1)\; a_{n-1}\, x^{n-2} +$$

$$+ n\, a_n\, x^{n-1} + (n+1)\; a_{n+1}\, x^n + \ldots$$

$$(1 - x^2)\; y' = a_1 + 2\, a_2\, x + (3\, a_3 - a_1)\, x^2 +$$

$$+ (4\ a_4 - 2\ a_2)\ x^3 + \ldots + ((n+1)\ a_{n+1} - (n-1)\ a_{n-1})\ x^n +$$

La igualdad de las series de potencias

$$(\ 1 - x^2\ )\ y' = y$$

equivale a

$$a_1 = a_0 \quad ; \quad 2\ a_2 = a_1 \quad ; \quad 3\ a_3 - a_1 = a_2 \quad ; \ldots$$

$$(n+1)\ a_{n+1} - (n-1)\ a_{n-1} = a_n$$

De esto, $a_0 = a$ es libre ,

$$a_1 = a$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\ a$$

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{3} = \frac{a + a/2}{3} = \frac{1}{2}\ a$$

$$a_4 = \frac{1}{4}\ (a_3 + 2\ a_2) = \frac{1}{4}\ (\ \frac{1}{2}\ a + a\ ) = \frac{3}{4.2}\ a$$

$$a_5 = \frac{1}{5}\ (a_4 + 3\ a_3) = \frac{1}{5}\ (\ \frac{3}{4.2} + \frac{3}{2}\ )\ a = \frac{15}{5.4.2}\ a = \frac{3}{4.2}\ a$$

$$a_6 = \frac{1}{6}\ (a_5 + 4\ a_4) = \frac{1}{6}\ (\ \frac{3}{4.2} + 4\ \frac{3}{4.2}\ )\ a = \frac{5.3}{6.4.2}\ a$$

$$a_7 = \frac{1}{7}\ (a_6 + 5\ a_5) = \frac{1}{7}\ (\ \frac{5.3}{6.4.2} + 5\ \frac{3}{4.2}\ )\ a = \frac{5.3}{6.4.2}\ a$$

En general

$$a_{2k} = a_{2k+1} = a \left(\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3.1}{2^k\ k!} \right)$$

$$= a \left(\frac{(2k)!}{2^k\ k!\ 2k(2k-2)\ldots 2} \right)$$

$$= a \left(\frac{(2k)!}{2^{2k}\ (k!)^2} \right)$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3.1}{2k(2k-2)\ldots 2.1}\, a$$

En efecto

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)} \left(a_n + (n-1)\, a_{n-1} \right)$$

Si $n+1 = 2p$, $a_{2p} = \frac{1}{2p} \left(a_{2p-1} + (2p-2)\, a_{2p-2} \right)$

Ahora, $2p-1 = 2\,(p-1) + 1$; $2p-2 = 2\,(p-1)$. De esto,

$$a_{2p-1} = a_{2p-2}$$

y

$$a_{2p} = \frac{1}{2p} \left(1 + 2p - 2 \right) a_{2(p-1)+1}$$

$$= \frac{1}{2p}\, (2p-1)\, \frac{(\,2\,(p-1) - 1\,)(\,2\,(p-1) - 3\,)\ldots 3.1}{(2(p-1))(2(p-1)-2)(2(p-1)-3)\ldots 2.1}\, a$$

= a lo propuesto.

Si $n+1 = 2p+1$, $n = 2p$, $n-1 = 2p - 1 = 2\,(p-1) + 1$

$$a_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \left(a_{2p} + (2p-1)\, a_{2p-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2p+1} \left(\frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 3.1}{(2p)(2p-2)\ldots 2} + \right.$$

$$\left. + (2p-1)\, \frac{(2(p-1)-1)(2(p-1)-3)\ldots 3}{2(p-1)(2(p-1)-2)\ldots 2} \right) a$$

Ahora, $2\,(p-1) -1 = 2p-3$, $2\,(p-1) - 3 = 2p-5$ ...

$2\,(p-1) = 2p-2$, $2\,(p-1) - 2 = 2p-4$ ...

Por consiguiente,

$$a_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \left(\frac{1}{2p} + 1 \right) \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 3}{(2p-2)(2p-4)\ldots 2}\, a$$

$$= \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 3}{2p(2p-2)\ldots 2} a$$

De esto, la serie formal que resuelve la ecuación es la suma de las se ries formales

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)\ldots 3}{2k\ldots 2} x^{2k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)\ldots 3}{2k\ldots 2} x^{2k+1}$$

Para estudiar la convergencia de estas series recordemos el siguiente :

CRITERIO DEL COCIENTE : Se tiene que la serie $\sum a_n x^n$ converge para $| x | < (1/R)$ y diverge para $| x | > (1/R)$, si

$$R = \text{lim superior} \frac{| a_{n+1} |}{| a_n |} .$$

Para nuestra serie en el caso $a \neq 0$ se tiene que

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = 1$$

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3.1}{2k(2k-2)\ldots 2.1} a \left(\frac{(2(k-1)-1)(2(k-1)-3)\ldots 3}{2(k-1)(2(k-1)-2)\ldots 2} a\right)^{-1}$$

$$= \frac{2k-1}{2k} < 1 \quad , \quad \forall k .$$

Por consiguiente, para $a \neq 0$, la serie formal que resuelve la ecuación converge para $|x| < 1$, y diverge para $|x| > 1$. En consecuencia la serie define una función para $|x| < 1$. Por la teoría general la derivada de una función definida por una serie se calcula derivando término a término, de lo que se deduce que nuestro procedimiento formal es un procedimiento válido en el intervalo (-1, 1) .

PROBLEMAS.

En cada caso, hallar una solución en serie de potencias del tipo $\Sigma\, a_n\, x^n$, e intentar reconocer la serie resultante como el desarrollo de una función familiar.

1. $y' = 2xy$

2. $y' + y = 1$

3. $y' = 2x - y$

En cada caso, hallar una solución en serie de potencias alrededor del punto apropiado. Determinar además el conjunto de valores de x para el cual la serie converge y la función que representa la serie resultante.

4. $y' = x - y \;;\; y(0) = 0$

5. $y' = -y \;;\; y(0) = 4$

6. $y' = xy \;;\; y(0) = 5$

5. PROBLEMA DE CAUCHY.

Su origen está dado en la resolución de problemas prácticos tales como :

1) Si conocemos la velocidad $v(t)$ para $t = 0$ hasta $t = 1000$ seg. de un móvil que se aleja de nuestra casa y sabemos que viaja en línea recta, calcular cuánta distancia recorrió en el instante $t = 985$ seg.

Newton descubrió que una manera de resolver este problema es :
Encontrar una función $y(t)$ de t definida en el intervalo $(0, 1000)$ de modo que

$$y'(t) = v(t), \ \forall\, t$$
$$y(0) = 0 .$$

El número $y(985)$ es la distancia recorrida hasta el instante $t = 985$ seg

12) Supongamos que queremos analizar cómo variará el número de habitantes de una especie que hoy en día tiene $y_o = 2000000$ habitantes, y que se reproduce de acuerdo a las siguientes reglas :

i) Cada miembro de la especie requiere de otro miembro para reproducir (no hay hermafroditas).

ii) La reproducción se hace de acuerdo a la probabilidad de encontrar un especímen del sexo opuesto (no hay casamientos, solo encuentros casuales para reproducir)

iii) El número de encuentros para la reproducción es proporcional al producto de la población masculina por la femenina, y si dichas poblaciones están distribuídas uniformemente, entonces el número de encuentros (por ende de nacimientos) en el año es proporcional a $(p(t))^2$, con $p(t)$ = número de pobladores en el año t.

iv) La tasa de mortalidad es proporcional a $p(t)$.

Entonces, se sabe que $p(t)$ es una función de t definida en el intervalo $(1994, \infty)$ que satisface

$$\frac{dp}{dt} = b\,p^2 - a\,p \quad ; \quad a,\ b > 0$$

$$p(1994) = 2000000 .$$

Aquí

$$\frac{dp}{b\,p^2 - a\,p} = dt$$

Ahora,

$$\frac{1}{b\,p^2 - a\,p} = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{p} - \frac{b}{b\,p - a}\right) = \left(\frac{b}{b\,p - a} - \frac{1}{p}\right)\frac{1}{a}$$

De esto,

$$\ln(\,b\,p - a\,) - \ln(p) = a\,t + C$$

o sea

$$\ln\left(\frac{b\,p - a}{p}\right) = a\,t + C \qquad ,$$

$$\frac{b\,p - a}{p} = C\,e^{at}$$

$$b\,p - a = p\,C\,e^{at}$$

$$(\,b - C\,e^{at}\,)\,p = a$$

$$p = \frac{a}{b - C\,e^{at}}\;.$$

$p(0) = 2000000 = p_o$ permite determinar $C = b - a/p_o = \dfrac{p_o\,b - a}{p_o}$.

Observemos que :

* Si $p_o\,b - a < 0$, $p(t) > 0 \quad \forall\, t$, y $p(t) \longrightarrow 0$ para t que tiende a infinito.

* Si $p_o\,b - a > 0$, $p(t) < 0$ para t grande.

Esto permite concluír que :

La población se extinguirá; su desaparición será en tiempo infinito si $p_o\,b - a < 0$ ($p_o < a/b$), y será en tiempo finito si $p_o\,b - a > 0$ ($p_o > a/b$) .

Desde el punto de vista matemático, el **problema de Cauchy** es :

DATA : $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $x_o \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}_o \in \mathbb{R}^n$ de modo que $(x_o, \mathbf{y}_o) \in D$.

SE BUSCA :

i) Un intervalo abierto (a, b) tal que $x_o \in (a, b)$.

ii) Una función continuamente derivable

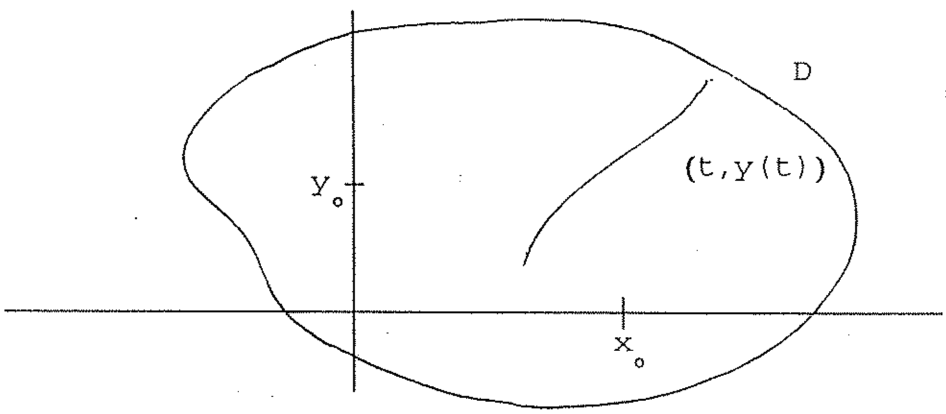
$$\mathbf{y} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

De modo que: a) $\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o$

b) $(t, \mathbf{y}(t)) \in D \quad \forall\, t$

c) $\mathbf{y}'(t) = F(t,\mathbf{y}(t)) \quad \forall\, t$

Para el caso $n = 1$, $y : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. La condición b) dice que el grafo de y está contenido en D, y la condición c) que $F(t,y(t))$ es igual a la pendiente de la tangente a la curva y en t.



EJEMPLO : Consideremos la ecuación $y' = x\,y$; $F(x,y) = x\,y$, $D = \mathbb{R}^2$. Hagamos $x_o = x_o$, $y_o = y_o$. Sabemos que las soluciones de $y' - x\,y = 0$ son

$$y(x) = C\, e^{x^2/2}$$

La condición $y(x_o) = y_o$ fuerza que

$$y_o = C\, e^{(x_o^2)/2}$$

De esto,

$$C = y_o\, e^{-(x_o^2)/2}$$

Por ende, en este caso para cada data inicial (x_o, y_o) existe una única solución a saber

$$y(x) = y_o\, e^{-(x_o^2)/2}\, e^{(x^2)/2} .$$

EJEMPLO : Consideremos la ecuación $y' = 3\, y^{2/3}$; $D = \mathbb{R}^2$, $F(t,y) = 3\, y^{2/3}$.

Fijemos como data inicial $(x_o, y_o) = (0, 0)$.

Una solución y es $y(x) = 0,\ \forall\, x$.

Otras soluciones son : Para $\alpha < 0 < \beta$ fijos sea

$$y_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} (x - \alpha)^3 & x < \alpha \\ 0 & \alpha \le x \le \beta \\ (x - \beta)^3 & \beta < x \end{cases}$$

Fuera de los puntos α, β es claro que y es derivable; para $x = \alpha$ o $x = \beta$ el cálculo de las derivadas laterales permite verificar que es derivable y que $y'(x) = 3\, (y(x))^{2/3}$ para cualquier x.

Ahora, $y_{\alpha,\beta}(0) = 0$. Por consiguiente, en este caso el problema de Cauchy tiene infinidad de soluciones.

EJEMPLO : En la ecuación $x\,y' = y$, el problema de Cauchy con data (0, 1) no admite solución, de lo contrario tendríamos

$$0\,y'(0) = y(0)$$

es decir, 0 = 1.

Veremos cómo se transforma el Problema de Cauchy en otro equivalente con integrales.

PROPOSICION : El conjunto de soluciones del Problema de Cauchy para $\mathbf{y}' = F(x,\mathbf{y})$ definidas en un intervalo (c,k) tal que $x_o \in (c,k)$ es igual al conjunto de funciones continuas $\mathbf{y} : (c,k) \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F(s,\mathbf{y}(s))\,ds \quad , \quad \forall\, x \in (c,k) . \qquad (44)$$

<u>Dem:</u> Lo probaremos con la doble inclusión.

$\subset$) Sea $\mathbf{y}$ perteneciente al conjunto de soluciones del Problema de Cauchy para $\mathbf{y}' = F(x,\mathbf{y})$ definidas en el intervalo (c,k) tal que $x_o \in (c,k)$. Entonces

$$\mathbf{y}'(x) = F(x,\mathbf{y}(x)) \quad , \quad \forall\, x \in (c,k) \quad , \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o .$$

Buscamos que

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F(s,\mathbf{y}(s))\,ds \quad , \quad \forall\, x \in (c,k)$$

o bien

$$\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_o = \int_{x_o}^{x} F(s,\mathbf{y}(s))\,ds \quad , \quad \forall\, x \in (c,k) .$$

Para calcular la integral necesitamos una primitiva, pero por hipótesis $\mathbf{y}(x)$ es primitiva de $F(x,\mathbf{y}(x))$, entonces por Barrow resulta

$$\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}(x_o) = \int_{x_o}^{x} F(s,\mathbf{y}(s))\, ds \quad , \quad \forall\ x \in (c,k) \ ,$$

como $\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o$, resulta lo buscado.

En particular, si el conjunto de la hipótesis es no vacío, el conjunto de funciones continuas definidas en (c,k) que verifica (44) es también no vacío.

⊃) Sea ahora $\mathbf{y}$ una función continua de (c,k) en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_o = \int_{x_o}^{x} F(s,\mathbf{y}(s))\, ds \quad , \quad \forall\ x \in (c,k) \ .$$

Para probar que $\mathbf{y}$ pertenece al conjunto de soluciones del Problema de Cauchy para $\mathbf{y}' = F(x,\mathbf{y})$ definidas y diferenciables en (c,k) y tal que $x_o \in (c,k)$ basta ver que :

$$\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o, \ \mathbf{y} \text{ es diferenciable, } \mathbf{y}'(x) = F(x,\mathbf{y}(x)),$$

pero esto resulta de inmediato al aplicar el siguiente :

TEOREMA : Sea $F(t,x)$ una función continua en (t,x). Si $\mathbf{y}(t)$ es continua, entonces

$$h(x) = \int_{x_o}^{x} F(t,\mathbf{y}(t))\, dt$$

es derivable.

Además, si el conjunto de la hipótesis es no vacío, el conjunto de soluciones del Problema de Cauchy también es no vacío.

Así queda probada la igualdad de los conjuntos. En particular, si uno de ellos es vacío, el otro también lo es.

q.e.d.

Peanno y Picard, en la segunda mitad del siglo pasado, completaron y sistematizaron condiciones suficientes para que el problema de Cauchy admita solución. A continuación discutiremos estos resultados.

De ahora en más, $|\ |$ o $\|\ \|$ indican la norma usual en $\mathbb{R}^k$.

DEFINICION: Una función $F : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es **Lipschitz** en $\mathbf{y}$ o lipschitziana en $\mathbf{y}$ en D si

$$\| F(t,\mathbf{y}) - F(t,z) \| \leq L \| \mathbf{y} - \mathbf{z} \|$$

para todo $(t,\mathbf{y})$, $(t,\mathbf{z})$ en D , donde $L < \infty$.

PROPOSICION : Sea D una bola abierta en $\mathbb{R}^{n+1}$, y escribamos

$$F = (F_1, \ldots, F_n)$$

con $F_j : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que cada F_j admite derivadas parciales, que son continuas en D y que existe una constante $M < \infty$ tal que

$$\left| \frac{\partial F_j(t,y)}{\partial y_k} \right| \leq M \quad \text{en } D \text{ .}$$

Entonces, F es Lipschitz en $\mathbf{y}$ en D .

<u>Dem:</u> En efecto,

$$\| F(t,\mathbf{y}) - F(t,\mathbf{z}) \| = \sqrt{\sum_j \left(F_j(t,\mathbf{y}) - F_j(t,\mathbf{z}) \right)^2} \text{ .}$$

Ahora, como el segmento que une $(t,\mathbf{y})$ con $(t,\mathbf{z})$ está contenido en D , se tiene que los puntos $(t , \mathbf{y}s+(1-s)\mathbf{z})$, $(s \in [0,1])$, pertenecen a D. De esto

$$\varphi_j(s) = F_j(t, \mathbf{y}s+(1-s)\mathbf{z})$$

está bien definida. Por análisis sabemos que φ_j es derivable en $[0,1]$. Apliquemos el Teorema del Valor Medio a φ_j. Obtenemos

$$\varphi_j(1) - \varphi_j(0) = F_j(t,\mathbf{y}) - F_j(t,\mathbf{z})$$

$$= \varphi'_j(\eta)\ (1-0) = \varphi'_j(\eta) \quad \text{con} \quad \eta \in (0,1)$$

Ahora,

$$\varphi'_j(s) = \frac{d}{ds} F_j(\,t,\ \mathbf{y}s+(1-s)\mathbf{z}\,)$$

$$= \frac{\partial F_j}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial y_k} \frac{d}{ds}(\,\mathbf{y}_k\, s + (1-s)\,\mathbf{z}_k\,)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\,\mathbf{y}_k - \mathbf{z}_k\,).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que,

$$|\ F_j(t,\mathbf{y}) - F_j(t,\mathbf{z})\ | \le \|\ \mathbf{y} - \mathbf{z}\ \| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial F_j}{\partial y_k} \right|^2}$$

Por la hipótesis en F, se tiene que

$$|\ F_j(t,\mathbf{y}) - F_j(t,\mathbf{z})\ | \le \|\ \mathbf{y} - \mathbf{z}\ \|\ n\ M$$

De esto,

$$\|\ F(t,\mathbf{y}) - F(t,\mathbf{z})\ \| \le n^2\ M\ \|\ \mathbf{y} - \mathbf{z}\ \|$$

para todo $(t,\mathbf{y})$, $(t,\mathbf{z})$ en D . Luego, F es lipschitziana en $\mathbf{y}$ en D.

q.e.d.

DEFINICION: $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es **localmente lipschitziana** si para cada $u = (s,v)$ en D, existe una bola de centro u, B_u, constante contenida en D de modo que F es Lipschitz en B_u.

EJEMPLO : Consideremos $F(t,y) = y^2$.

$$F(t,y) - F(t,z) = y^2 - z^2 = (y + z)(y - z).$$

Considerando $(t,z),(t,y)$ pertenecientes a la banda dibujada, resulta

$$| F(t,y) - F(t,z) | \leq | y - z | (2 | y_0 | + 1)$$

y así F es localmente lipschitziana.

PROPOSICION: Si $F : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ admite derivadas parciales de primer orden continuas, entonces F es localmente lipschitziana.

Dem: Sea B_u una bola de centro u ($u \in D$), y radio finito de modo que la bola cerrada $\overline{B_u}$ del mismo radio y centro esté contenida en D. Como $\overline{B_u}$ es cerrada y acotada, la continuidad de $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_k'}$ implica que existen constantes M_{jk} tales que

$$\left| \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right| \le M_{jk} < \infty \quad \text{en} \quad \overline{B_u} .$$

Sea $M = \sup_{j,k} \{ M_{jk} \} < \infty$. Por la proposición anterior resulta que F es lipschitziana en $\overline{B_u}$, de lo cual concluímos que F es localmente lipschitziana.

q.e.d.

PROBLEMAS.

1. Demostrar que para $f(x,y) = y^{1/2}$

a) no se satisface una condición de Lipschitz sobre el rectángulo $|x| \le 1 \quad 0 \le y \le 1$.

b) se satisface una condición de Lipschitz sobre el rectángulo $|x| \le 1$, $c \le y \le d$, donde $0 < c < d$.

2. Demostrar que para $f(x,y) = x\, y^2$

a) se satisface una condición de Lipschitz sobre el rectángulo $a \le x \le b \quad c \le y \le d$.

b) no se satisface una condición de Lipschitz sobre ninguna banda $a \le x \le b \quad -\infty < y < \infty$.

6. TEOREMA DE PEANNO PICARD.

DATA: $D \subset \mathbb{R}^{k+1}$ abierto;

$F : D \to \mathbb{R}^k$ continua;

$x_o \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}_o \in \mathbb{R}^k$ tal que $(x_o, \mathbf{y}_o) \in D$;

Existe $K > 0$ tal que

$$\| F(x,\mathbf{y}) - F(x,\mathbf{z}) \| \le K \| \mathbf{y} - \mathbf{z} \|,$$

$\forall\ (x,\mathbf{y}),\ (x,\mathbf{z})$ en $D_1 = (x_o - a , x_o + a) \times B(\mathbf{y}_o, r)$ de modo que $\overline{D}_1 \subset D$;

$M = \max \{ \| F(x,\mathbf{y}) \| : (x,\mathbf{y}) \in \overline{D}_r \}$;

$h = \inf (a, r/M)$; de esto $h \le a$, $h \le r / M$.

TESIS: Existe una y sólo una función

$$\mathbf{y} : (x_o - h , x_o + h) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

de modo que : $(x, \mathbf{y}(x)) \in D$, $\forall\ x \in (x_o - h , x_o + h)$

$$\mathbf{y}'(x) = F(x, \mathbf{y}(x)) , \forall\ x \in (x_o - h , x_o + h)$$

$$\mathbf{y} (x_o) = \mathbf{y}_o .$$

Sabemos que un enunciado equivalente de la tesis es :

TESIS : Existe una y sólo una función continua

$$\mathbf{y} : (x_o - h , x_o + h) \to \mathbb{R}^k$$

que satisface

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F(s,\mathbf{y}(s))\, ds \quad , \quad \forall\ x \in (x_o - h , x_o + h)$$

A continuación probaremos esta última tesis.

<u>Dem:</u> Usamos el método de aproximaciones sucesivas. Esto es,

construiremos inductivamente una sucesión de funciones

$$\mathbf{y}_n : (x_o - h , x_o + h) \longrightarrow B (\mathbf{y}_o , r) .$$

Luego, probaremos que converge a una función y que esta función es la solución.

Sean

$$\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F (s, \mathbf{y}_o) \, ds$$

$$\mathbf{y}_2(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F (s, \mathbf{y}_1(s)) \, ds$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F (s, \mathbf{y}_{n-1}(s)) \, ds .$$

Veamos que :

i) $\mathbf{y}_n (x_o - h , x_o + h) \subset B (\mathbf{y}_o , r)$.

ii) $\mathbf{y}_n(x_o) = \mathbf{y}_o$

iii) $\mathbf{y}_n$ es continua $\forall\, n$

iv) $\mathbf{y}_n$ converge uniformemente

v) Sea $\mathbf{y}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_n(x)$, entonces $\mathbf{y}$ es continua y satisface

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F (s, \mathbf{y}(s)) \, ds ,$$

$$\forall\, x \in (x_o - h , x_o + h) .$$

i) Lo probaremos por inducción sobre n .

$$\| \mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_o \| = \left\| \int_{x_o}^{x} F (s, \mathbf{y}_o) \, ds \right\|$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} \left\| F (s, \mathbf{y}_o) \right\| ds$$

$$\leq | x - x_o | M$$

$$\leq h M \leq r ;$$

Así, $\mathbf{y}_1(x) \in B(\mathbf{y}_o, r)$, $\forall x \in (x_o - h , x_o + h)$.

Supongamos que $\mathbf{y}_n ((x_o - h , x_o + h)) \subseteq B (\mathbf{y}_o , r)$, y veamos que $\mathbf{y}_{n+1} ((x_o - h , x_o + h)) \subseteq B (\mathbf{y}_o , r)$.

$$\| \mathbf{y}_{n+1}(x) - \mathbf{y}_o \| = \left\| \int_{x_o}^{x} F (s, \mathbf{y}_n(s)) ds \right\|$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} \left\| F (s, \mathbf{y}_n(s)) \right\| ds$$

$$\leq | x - x_o | M \leq h M \leq r ,$$

y esto pasa $\forall x \in (x_o - h , x_o + h)$. De esto resulta que

$$\mathbf{y}_{n+1} ((x_o - h , x_o + h)) \subseteq B (\mathbf{y}_o , r) .$$

ii) $\mathbf{y}_n (x_o) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x_o} F (s, \mathbf{y}_{n-1}(s)) ds = \mathbf{y}_o$.

iii) Como F es continua en $(s,\mathbf{y}(s)) \in D$, por el Teorema Fundamental del Cálculo resulta que

$$\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F (s, \mathbf{y}_o) ds$$

es continua. Por inducción resulta que

$$\mathbf{y}_{n+1}(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F (s, \mathbf{y}_n(s)) ds$$

es continua por serlo el integrando.

iv) Veamos que $\mathbf{y}_n$ es uniformemente convergente. Para esto usamos el siguiente :

SUBLEMA : $\mathbf{y}_n$ converge uniformemente si y sólo si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1})$$

converge uniformemente.

Para la convergencia uniforme de la serie usamos el =:
CRITERIO DE WEIERSTRASS : La serie $\sum f_n$ converge uniformemente si $| f_n(x) | \leq M_n$, $\forall\, x$, y $\sum M_n < \infty$.

Busquemos el M_n del criterio.

$$\| \mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_o \| \leq \int_{x_o}^{x} \left\| F (s, \mathbf{y}_o) \right\| ds \leq | x - x_o | M$$

$$\| \mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x) \| \leq \int_{x_o}^{x} \| F (s, \mathbf{y}_1(s)) - F (s, \mathbf{y}_o) \| ds$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} K \| \mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_o \| ds$$

$$\leq K M \int_{x_o}^{x} | s - x_o | ds$$

$$= \frac{(x - x_o)^2}{2} K M$$

$$\| \mathbf{y}_3(x) - \mathbf{y}_2(x) \| \leq \int_{x_o}^{x} \| F (s, \mathbf{y}_2(s)) -$$

$$- F(s, \mathbf{y}_1(s)) \| ds$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} K \| \mathbf{y}_2(s) - \mathbf{y}_1(s) \| \quad ds$$

$$\leq K \int_{x_o}^{x} \frac{(s - x_o)^2}{2} K M \, ds$$

$$= M \frac{K^2}{3!} (x - x_o)^3$$

$$= \frac{M}{K} \frac{(K(x - x_o))^3}{3!}$$

$$\| \mathbf{y}_{n+1}(x) - \mathbf{y}_{n+2}(x) \| \leq K \int_{x_o}^{x} \| \mathbf{y}_n(s) - \mathbf{y}_{n-1}(s) \| \quad ds$$

$$\leq \frac{M}{K} K \int_{x_o}^{x} \frac{(K(x - x_o))^n}{n!}$$

$$= \frac{M}{K} \frac{(K(x - x_o))^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si $M_n = \frac{M}{K} \frac{(Kh)^n}{n!}$, entonces $\sum M_n < \infty$, y tenemos la convergencia uniforme de las $\mathbf{y}_n$.

v) Sea $\mathbf{y}(x) = \lim \mathbf{y}_n(x)$, entonces $\mathbf{y}$ es continua por serlo cada $\mathbf{y}_n$.

Para concluír la demostración usaremos el siguiente :

SUBLEMA : Si $f_n(s)$ converge uniformemente en $[x_o, x_o + h]$, y f_n continua con $f = \lim f_n$, entonces

$$\int_{x_o}^{x} f = \lim \int_{x_o}^{x} f_n(s)\ ds \ .$$

<u>Dem:</u> Resulta del siguiente hecho :

$$\left\| \int_{x_o}^{x} (f - f_n)\ ds \right\| \le h \sup_{x\in[x_o',x_o+h]} \| f - f_n(x) \|$$

q.e.d.

Aplicaremos esto a las funciones

$$f_n(s) = F(s, \mathbf{y}_{n-1}(s)).$$

Como

$$\| f_{n+p}(x) - f_n(x) \| = \left\| \sum_{j=1}^{p} (f_{n+j}(x) - f_{n+(j-1)}(x)) \right\|$$

$$\le \sum_{j=1}^{p} \| f_{n+j}(x) - f_{n+(j-1)}(x) \|$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \| F(x, \mathbf{y}_{n+j}(x)) - F(x, \mathbf{y}_{n+(j-1)}(x)) \|$$

$$\le \sum_{j=1}^{p} \frac{M}{K} \frac{(K h)^{n+j}}{(n+j)!} = \frac{M}{K} (S_{n+p} - S_n)$$

donde $S_n = 1 + (K h) + \ldots + \dfrac{(K h)^n}{n!}$.

S_n converge a e^{Kh} , f_n es de Cauchy , y f_n converge uniformemente. De esto, por la unicidad del límite de una sucesión se tiene que

$$\lim_n \mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} \lim_{n\to\infty} F(s, \mathbf{y}_n(s))\ ds$$

Por la continuidad de F, se cumple

$$\lim_{n\to\infty} F(\, s,\ \mathbf{y}_n(s)\ ) = F(\, s,\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n(s)\ )$$

$$= F(\, s,\ \mathbf{y}(s)\ )\ .$$

De esto,

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F\ (\, s,\ \mathbf{y}(s)\ )\ ds\ .$$

lo que prueba la existencia propuesta en el Teorema de Peanno Picard.

Probaremos ahora la unicidad de la solución.

Sea

$$f\ :\ (\ x_o - h',\ x_o + h'\,) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

continua tal que $(\ x,\ f(x)\ ) \in D,\ \forall\ x \in (\ x_o - h',\ x_o + h'\,)$

y

$$f(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F\ (\ s,\ f(s)\ )\ ds\ .$$

De esto $f(x_o) = \mathbf{y}_o$. Por la continuidad de f existe $h'' \le h'$ $h'' \le h$ tal que

$$\|\ f(x) - \mathbf{y}_o\ \| \le r \quad \text{para} \quad |\ x - x_o\ | \le h''$$

si $x \in (\ x_o - h'',\ x_o + h''\,)$

$$f(x) - \mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F(\ s,\ f(s)\ ) -$$

$$- F\ (\ s,\ \mathbf{y}_{n-1}(s)\ ) - \mathbf{y}_o$$

$$= \int_{x_o}^{x} F(\ s,\ f(s)\ ) - F(\ s,\ \mathbf{y}_{n-1}(s)\ )\ ds$$

De esto,

$$\| f(x) - \mathbf{y}_n(x) \| \leq \int_{x_o}^{x} K \, \| f(s) - \mathbf{y}_{n-1}(s) \| \, ds \, .$$

Para $n = 1$

$$\| f(x) - \mathbf{y}_1(x) \| \leq \int_{x_o}^{x} K \, \| f(s) - \mathbf{y}_o \| \, ds$$

$$\leq K \, r \, (x - x_o)$$

En general, por inducción

$$\| f(x) - \mathbf{y}_n(x) \| \leq r \, K^n \frac{(x - x_o)^n}{n!}$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$, $K^n \dfrac{(x - x_o)^n}{n!} \longrightarrow 0$, por consiguiente

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}(x) \; ; \; \forall \, x \in (x_o - h'', x_o + h'') \, .$$

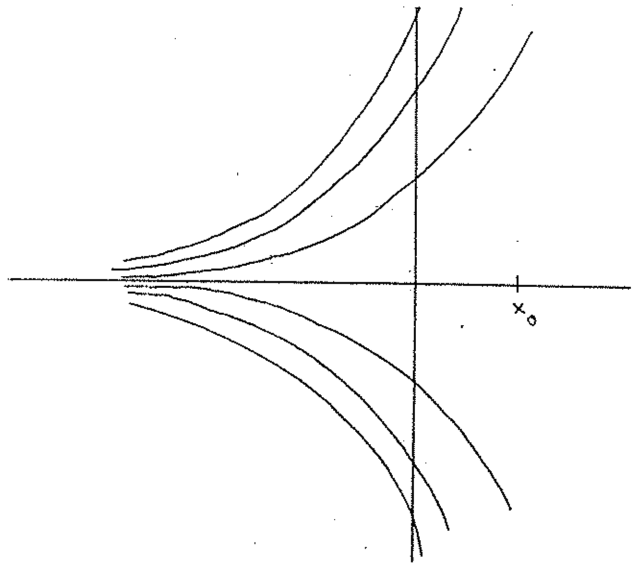
q.e.d.

Historia : El método de aproximaciones sucesivas aparece en casos particulares en los trabajos de Cauchy pero explicitado por Liouville en 1838 para el caso de ecuaciones lineales de segundo orden homógeneas. El caso de ecuaciones homogéneas lineales de orden n fue tratado con el mismo método por Caqué (1864), Fuchs (1870), Peanno (1888). En forma general fue estudiado por Picard (1893) y Bôcher (1902).

EJEMPLO : Para la ecuación $y' = y$, la función

$$y_{x_o, y_o}(x) = y_o \, e^{(x-x_o)}$$

es la única que satisface $y_{x_o,y_o}(x_o) = y_o$. Nótese que y_{x_o,y_o} está definida $\forall\ x \in \mathbb{R}$, y que los grafos originan una partición del plano en curvas disjuntas : " foliación del plano " .



EJEMPLO : Consideremos ahora $y' = -y^2$.

$$y' = -y^2 \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{y} = x + K \Rightarrow y = \frac{1}{x+K}$$

$$y(x_o) = y_o \iff \frac{1}{y_o} = x_o + K \Rightarrow K = \frac{1}{y_o} - x_o = \frac{1 - x_o\, y_o}{y_o} .$$

Luego, las soluciones de la ecuación dada son :

$$y_{x_o,y_o}(x) = \left(x - x_o + \frac{1}{y_o} \right)^{-1} \quad \text{si } y_o \neq 0$$

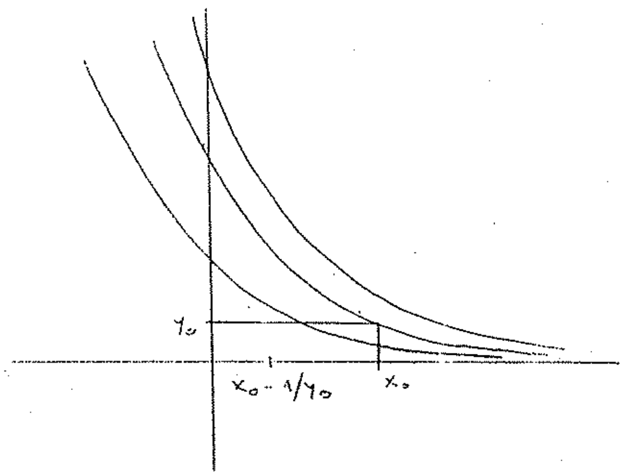
$$y_{x_o,y_o}(x) \equiv 0 \quad \text{si } y_o = 0$$

De esto, para $y_o = 0$ la única solución y_{x_o,y_o} que resuelve el problema de Cauchy está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si $y_o \neq 0$, y_{x_o,y_o} no está definida para $x = x_o - \dfrac{1}{y_o}$.

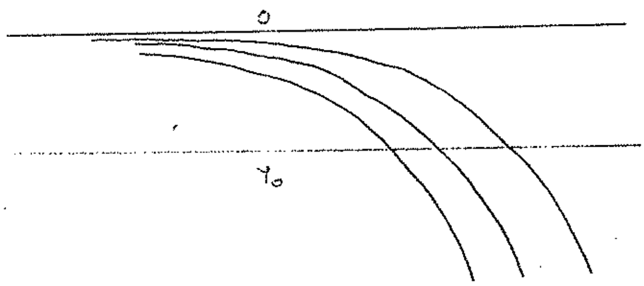
* Caso $y_o > 0 \Rightarrow x_o > x_o - \dfrac{1}{y_o}$

$\Rightarrow y_{x_o,y_o} : \left(x_o - \dfrac{1}{y_o} , +\infty \right) \longrightarrow \mathbb{R}$ es la solución de la ecuación que satisface $y_{x_o,y_o}(x_o) = y_o$



En este caso, la solución que cumple $y(x_o) = y_o$ ($y_o > 0$) está definida en la semirrecta $\left(x_o - \dfrac{1}{y_o} , +\infty \right)$.

* Caso $y_o < 0 \Rightarrow x_o < x_o - \dfrac{1}{y_o}$, la solución y_{x_o,y_o} está definida en $\left(-\infty , x_o - \dfrac{1}{y_o} \right)$.



En este ejemplo nuevamente tenemos una foliación del plano, y las soluciones están definidas en <u>semirrectas</u> .

EJEMPLO : Para $y' = 1 + y^2$, las soluciones son

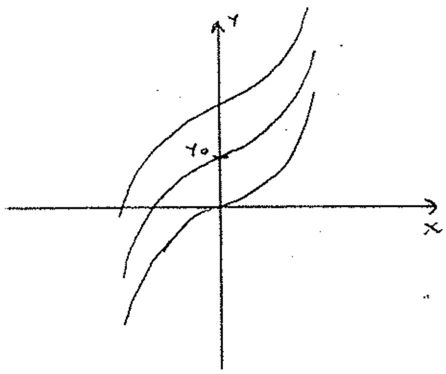
$$y(x) = tg\ (x + C) .$$

Para $y(x_o) = y_o$ sea $C_{y_o} \in (- \pi/2 , \pi/2)$ tal que

$$tg\ (C_{y_o}) = y_o .$$

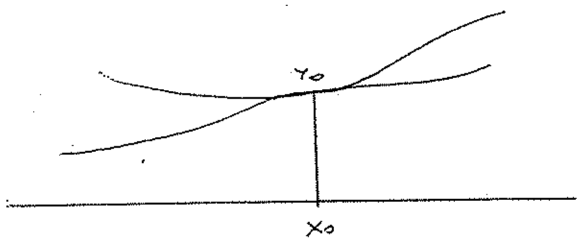
Sea $y_{x_o,y_o}(x) = tg\ (x - x_o + C_{y_o})$.

Para x próximo a x_o , $x - x_o + C_{y_o}$ pertenece al intervalo $(- \pi/2 , \pi/2)$, por consiguiente y_{x_o,y_o} está definida allí y es continua. Por la unicidad en Cauchy, y_{x_o,y_o} es la solución de la ecuación dada, que pasa por (x_o,y_o), y_{x_o,y_o} definida para x en un intervalo finito cuyos extremos dependen de x_o, y_o .En este caso la foliación es



Estos ejemplos muestran lo que sucede en general, pero necesita una demostración. Para esto sea :

PROPOSICION : Las soluciones no se convierten en " bigote ". Esto es, no se puede dar un dibujo como



Aquí, $y' = F(x,y(x))$; $f'(x) = F(x,f(x))$; $f(x_0) = y(x_0) = y_0$.
Explicitemos la hipótesis y la tesis.

HIPOTESIS : $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ continua y localmente lipschitziana.

Fijemos $(x_o, y_o) \in D$. Por el Teorema de Peanno Picard, para $h = \inf \{ a, r/M \}$, con h, r, M bajo las condiciones de dicho Teorema, existe una solución

$$y : (x_o - h , x_o + h) \longrightarrow \mathbb{R}^k ,$$

de $y'(x) = F(x,y(x))$, $y(x_o) = y_o$, $\forall x \in (x_o - h , x_o + h)$.

Se probó también que si f es otra solución al problema, entonces $y(x) = f(x)$, $\forall x \in (x_o - h'' , x_o + h'')$, esto es, para x próximo a x_o (Ver demostración).

Sean ahora I, J intervalos abiertos, con

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^k \text{ de clase } C^{(1)} \; ; \; g : J \longrightarrow \mathbb{R}^k \text{ de clase } C^{(1)}$$

tales que

$$(x, f(x)) \in D , \forall x \in I \; ; \; (x, g(x)) \in D , \forall x \in J$$

$$x_o \in I \cap J \; ; \; f(x_o) = g(x_o) = y_o$$

$$f'(x) = F(x,f(x)) \; \forall x \in I \; ; \; g'(x) = F(x,g(x)) \; \forall x \in J$$

TESIS : $f = g$ en $I \cap J$.

Dem: Sea $A = \{ x \in I \cap J : f(x) = g(x) \}$. El conjunto A es no vacío, pues $x_o \in A$:

El complemento de A respecto de $I \cap J$ es

$$\{ x \in I \cap J : f(x) \neq g(x) \}.$$

Como el conjunto de puntos en los cuales dos funciones difieren es abierto, A es cerrado respecto de $I \cap J$.

Por otro lado, A es abierto (en $\mathbb{R}$), pues sea $z \in A$, entonces $z \in I \cap J$ y $f(z) = g(z)$. Luego, por Peanno Picard

$$\exists\, h'' : f(x) = g(x),\ \forall\, x \in (\, z - h'',\ z + h''\,) \subset I \cap J.$$

Así,

$$(\, z - h'',\ z + h''\,) \subset A$$

Como A es abierto y cerrado respecto de $I \cap J$, e $I \cap J$ es conexo, entonces se tiene que $A = \emptyset$ ó $A = I \cap J$.
Como $A \neq \emptyset$, resulta $A = I \cap J$. Luego,

$$f(x) = g(x)\ ,\ \forall\, x \in I \cap J\ .$$

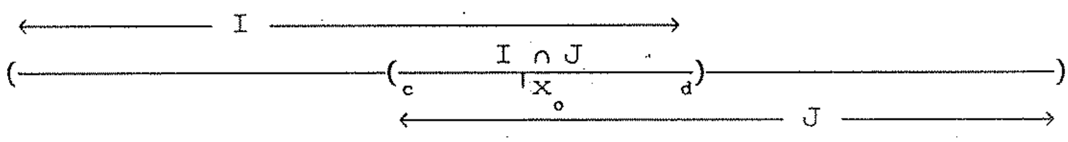
q.e.d.

COROLARIO : Sean f, g como en el teorema, y $p : I \cap J \longrightarrow \mathbb{R}^k$ definida por

$$p(x) = \begin{cases} f(x) = g(x) & \text{si } x \in I \cap J \\ f(x) & \text{si } x \in I - (\, I \cap J\,) \\ g(x) & \text{si } x \in J - (\, I \cap J\,) \end{cases}$$

Entonces $p : I \cup J \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una solución que extiende a f y g .

<u>Dem:</u> Sea $I \cap J = (\, c,\ d\,)$



Es claro que p es diferenciable en todo punto distinto de c o d, y que $p'(x) = F(x,p(x))$ en dichos puntos.
Para $x = c$ a la izquierda de c, p coincide con f y entonces $F(x,p(x)) = F(x,f(x)) = p'(x)$.
A la derecha de c , $F(x,g(x)) = F(x,f(x)) = p'(x)$, dado que $f = g$ en $I \cap J = (\, c,\ d\,)$. Luego, cuando x tiende a c , tanto por derecha como por izquierda existe el $\lim p'(x)$, y vale en ambos casos $F(c,f(c))$. Luego, valiéndonos del siguiente le-

ma resultará que p es derivable en $x = c$, p' es continua en ese punto, y además

$$p'(c) = \lim_{x \to c} p'(x) .$$

Por un razonamiento análogo resulta que p satisface la derivabilidad en $x = d$, p' es continua en $x = d$, y

$$p'(d) = \lim_{x \to d} p'(x) .$$

Así, p es continuamente derivable en $I \cap J$.

q.e.d.

LEMA : Sean p una función definida y continua en un intervalo (c,d), y $q \in (c,d)$ tal que p es derivable con continuidad en (c,q) y en (q,d). Además, supongamos que $\lim_{x \to q^{\pm}} p'(x)$ existen y son iguales.Entonces p es derivable en q , p' es continua en q , y además $p'(q) = \lim_{x \to q} p'(x)$.

PRUEBA : Por el Teorema del valor medio, existe q_h tal que

$$\frac{p(q + h) - p(q)}{h} = \frac{p'(q_h)\, h}{h}$$

donde $q < q_h < q + h$ si $h > 0$, $q + h < q_h < q$ si $h < 0$
De esto, los cocientes incrementales a derecha e izquierda de p en el punto q tienen límite, y coinciden con $\lim_{p \to q} p'(x)$ el cual existe por hipótesis. Así, p es derivable en q . Además p' es continua en q por construcción.

q.e.d.

Ahora estamos en condiciones de definir el concepto de dominio máximo de la solución que pasa por (x_o, y_o) .

Siempre suponemos F continua y localmente lipschitziana.

DEFINICION : Sea $(x_o, y_o) \in D$, el **dominio máximo** de la solución de $y' = F(x,y)$ que pasa por (x_o, y_o) es un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ tal que $x_o \in I$, y existe una función de clase $C^{(1)}$ $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^k$ de modo que

$$f(x_o) = y_o ,$$
$$(x, f(x)) \in D \quad \forall x \in I ,$$
$$f'(x) = F(x, f(x)) \quad \forall x \in I ,$$

y tal que satisface lo siguiente : Para $J \subset \mathbb{R}$ cualquier intervalo abierto con $x_o \in J$ y cualquier $h : J \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tal que : h es de clase $C^{(1)}$, $h(x_o) = y_o$, $(x,h(x)) \in D \ \forall x \in J$, $h'(x) = F(x,h(x)) \ \forall x \in J$.

Entonces $J \subset I$.

EJEMPLO : Para $y' = y$, y para todo (x_o, y_o) , el dominio máximo es $\mathbb{R}$.

EJEMPLO : Para $y' = -y^2$, considerando $(x_o, 0)$, el dominio máximo es $\mathbb{R}$. Considerando (x_o, y_o) con $y_o > 0$, el dominio máximo es $\left(x_o - \dfrac{1}{y_o} , +\infty \right)$. Para (x_o, y_o) con $y_o < 0$, el dominio máximo es $\left(-\infty , x_o - \dfrac{1}{y_o} \right)$.

EJEMPLO : Para $y' = 1 + y^2$, el dominio máximo es el intervalo finito de longitud π dado por

$$\left(-(\pi/2) + x_o - C_{y_o} , (\pi/2) + x_o - C_{y_o} \right) ,$$

puesto que

$$y_{x_o, y_o}(x) = \operatorname{tg}(x - x_o + C_{y_o})$$

con $C_{y_o} \in (-\pi/2 \ , \pi/2)$ y $\operatorname{tg}(C_{y_o}) = y_o$.

Para probar formalmente que existe el dominio máximo, consideramos el conjunto

$$B = \{ (J, h) : J \subset \mathbb{R} \text{ intervalo abierto} ; x_o \in J ;$$
$$h : J \longrightarrow \mathbb{R}^k \text{ de clase } C^{(1)} ; h(x_o) = y_o ;$$
$$(x,h(x)) \in D, \ \forall x \in J ; h'(x) = F(x,h(x)) , \ \forall x \in J \}$$

Ordenamos parcialmente a B por

$$(J, h) \propto (J', h') \quad \text{si} \quad J \subset J' \ , \ h'|_J = h .$$

Por el lema de Zorn puede probarse que el conjunto B admite elementos maximales.

EJERCICIO : Probar que se satisfacen las hipótesis del lema de Zorn.

Retomando las ecuaciones lineales de primer orden

$$y' + b(x) y + c(x) = 0$$

(Secc. 4) donde b y c están definidas y son continuas en un intervalo I, hemos visto que las soluciones están definidas en dicho intervalo. De esto, el intervalo máximo aquí es I .

PROPOSICION : Si $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+1}$, F es acotada, continua y localmente lipschitziana, entonces el intervalo máximo para toda solución es $\mathbb{R}$.

Dem: Si $(x_o, y_o) \in D$, hemos probado que la solución que pasa por ese punto está definida al menos en el intervalo

$$(x_o - h, x_o + h) \quad \text{con} \quad h = \inf(c, r/M)$$

donde c, r son tales que

$$\overline{(x_o - c, x_o + c) \times B(y_o, r)} \subset D,$$

y M es igual al supremo de $\| F \|$ en

$$(x_o - c, x_o + c) \times B(y_o, r).$$

Pero aquí podemos tomar c tan grande como querramos, por ejemplo, $c = 1 + r/M$, y como $M = \sup_{\mathbb{R}^{k+1}} \| F \|$ es finito dado que F es acotada, tenemos soluciones definidas en $(x_o - h, x_o + h)$, con h tan grande como querramos.

Por ende, el dominio máximo es $\mathbb{R}$.

q.e.d.

Por ejemplo, las soluciones de

$$y' = \frac{e^{-y^2-x^2-(xy)^4-y^6}}{1 + y^6 + x^6} \quad ; \quad y' = \cos(e^y)$$

están definidas en toda la recta real.

PROBLEMAS.

1. Obtener las iteraciones de Picard para el problema de valor inicial $y' = 2t(y + 1)$, $y(0) = 0$. Demostrar que convergen a la solución $y(t) = \exp(t^2) - 1$

Usar el método de Picard para obtener las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones. Encuentrar al menos la cuarta aproximación a cada solución.

2. $y' = 3y \quad ; \quad y(0)=1$

3. $y' = x^2 - y \quad ; \quad y(0)=0$

4. $y' = e^x + y \quad ; \quad y(0) = 0$

En cada uno de los Problemas 5 a 9 demostrar que la solución $y(t)$ del problema de valor inicial dado existe en el intervalo indicado.

5. $y' = y^2 + \cos t^2, \qquad y(0) = 0; \qquad 0 \le t \le 1/2$

6. $y' = 1 + y + y^2 \cos t, \qquad y(0) = 0; \qquad 0 \le t \le 1/3$

7. $y' = t + y^2, \qquad y(0) = 0; \qquad 0 \le t \le (1/2)^{2/3}$

8. $y' = e^{-t^2} + y^2, \qquad y(0) = 0; \qquad 0 \le t \le 1/2$

9. $y' = e^{-t^2} + y^2, \qquad y(1) = 0; \qquad 1 \le t \le 1 + \sqrt{e} / 2$

10. Considerar el problema de valor inicial

$$y' = t^2 + y^2 \quad ; \quad y(0) = 0 \qquad (*)$$

Sea R el rectángulo $0 \le t \le a$, $-b \le y \le b$.

a) Demostrar que la solución $y(t)$ de (*) existe para

$$0 \le t \le \min \left(a, \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

b) Demostrar que el valor máximo de $\dfrac{b}{a^2 + b^2}$, para a fija, es $1/2a$.

c) Demostrar que $\alpha = \min \{ a, 1/2a \}$ alcanza su máximo para $a = 1/2$

d) Concluír que la solución $y(t)$ de (*) existe para $0 \leq t \leq 1/2$.

11. Pruebar que $y(t) = -1$ es la solución única del problema de valor inicial $y' = t\ (1 + y)$, $y(0) = -1$.

12. Hallar una solución no trivial del problema de valor inicial $y' = t\ y^a$ $y(0) = 0$, $a > 1$. Contradice esto al Teorema de existencia y unicidad ?

13. Encontrar una solución al problema de valor inicial

$$y' = t \sqrt{1 - y^2} \ , \ y(0) = 1 \ .$$

Contradice esto al Teorema de existencia y unicidad ?

UNIDAD II : SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Trabajaremos ahora con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Se tiene entonces

DATA : $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto

$A : I \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k} = \mathbb{R}^{k^2}$ continua

$\mathbf{b} : I \longrightarrow \mathbb{R}^k$ continua (1)

La ecuación es $\mathbf{y}' = A(x)\ \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$

TESIS : Se busca $\mathbf{y} : J \longrightarrow \mathbb{R}^k$ de clase $C^{(1)}$ con $J \subset I$ de modo que : $(\ x,\ \mathbf{y}(x)\ ) \in D,\ \forall\ x \in J;$

$\mathbf{y}'(x) = F(x,\mathbf{y}),\ \forall\ x \in J;$

$\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o.$

Aquí, $D = I \times \mathbb{R}^k$, $F(x,\mathbf{y}) = A(x)\ \mathbf{y} - \mathbf{b}(x)$.

Claramente F es continua. por serlo A y $\mathbf{b}$, y es localmente lipschitziana en $\mathbf{y}$, pues

$$\| F(x,\mathbf{y}) - F(x,\mathbf{z}) \| = \| A(x)\ (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \| ,$$
$$\leq \| A(x) \| \ \| \mathbf{y} - \mathbf{z} \|$$

Por consiguiente, por Peanno-Picard, para cada

$$(\ x_o,\ \mathbf{y}_o\ ) \in I \times \mathbb{R}^k$$

existe una única solución $\mathbf{y}_{x_o,y_o}$ de $\mathbf{y}' = A(x)\ \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ con $\mathbf{y}_{x_o,y_o}(x_o) = \mathbf{y}_o$.

TEOREMA : El intervalo máximo de definición de las soluciones de $\mathbf{y}' = A(x)\ \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ es I ; esto es, $I_{max} = I$.

<u>Dem :</u> Lo que haremos es repetir la prueba de Peanno Picard para este caso.

Veamos primero que

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F\,(\ s,\ \mathbf{y}_{n-1}(s)\ )\ ds$$

está definida para todo x en I, y que la convergencia es uniforme en compactos contenidos en I.
Como $\mathbf{y}_o(x) = \mathbf{y}_o$, resulta que $\mathbf{y}_o$ está definida en I.

$$\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F\,(\ s,\ \mathbf{y}_o\ )\ ds$$

$$= \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} (\ A(s)\ \mathbf{y}_o + \mathbf{b}(s)\ )\ ds$$

Como A, $\mathbf{b}$ son continuas, la integral existe para todo x perteneciente a I y, por el Teorema del Cálculo integral, $\mathbf{y}_1$ es continua en I.

Supongamos ahora que $\mathbf{y}_{n-1}$ está definida y es continua en I.

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F\,(\ s,\ \mathbf{y}_{n-1}(s)\ )\ ds$$

$$= \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} (\ A(s)\ \mathbf{y}_{n-1}(s) + \mathbf{b}(s)\ )\ ds$$

Nuevamente el integrando es continuo para todo $x \in I$, y en consecuencia $\mathbf{y}_n(x)$ existe y define una función continua en x.

La prueba de la convergencia uniforme en intervalos del tipo

$$[\ x_o - h\ ,\ x_o + h\ ] \subset I$$

se sigue de

$$\|\ A(s)\ \| \le K < \infty\ ,\ \forall\ s \in [\ x_o - h\ ,\ x_o + h\ ]$$

donde $K = \sup \{\ \|\ A(s)\ \|\ :\ s \in [\ x_o - h\ ,\ x_o + h\ ]\ \}$, y del hecho de que inductivamente resulta que

$$\| \mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_{n-1}(x) \| \leq \frac{K^{n-1}}{n!} M (x - x_o)^n$$

$$= \frac{M}{K} \frac{[K (x - x_o)]^n}{n!}$$

$$\| \mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_{n-1}(x) \| = \left\| \int_{x_o}^{x} A(s) [\mathbf{y}_{n-1}(s) - \mathbf{y}_{n-2}(s)] \, ds \right\|$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} \| A(s) \| \, \| \mathbf{y}_{n-1}(s) - \mathbf{y}_{n-2}(s) \| \, ds$$

Para $n = 1$ resulta

$$\| \mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_o(x) \| \leq \left\| \int_{x_o}^{x} F(s, \mathbf{y}_o) \, ds \right\|$$

$$\leq \int_{x_o}^{x} \| A(s) \, \mathbf{y}_o + \mathbf{b}(s) \| \, ds$$

$$\leq M (x - x_o)$$

con $M = \sup \{ \| A(s) \, \mathbf{y}_o + \mathbf{b}(s) \| : s \in [x_o - h , x_o + h] \}$.

Para $n = 2$ resulta

$$\| \mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x) \| = \int_{x_o}^{x} \| A(s) \| \, \| \mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_o \| \, ds$$

$$\leq K M \int_{x_o}^{x} (s - x_o) \, ds$$

$$\leq K M \frac{(x - x_o)^2}{2}$$

Así, $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_{n-1}(x))$ converge uniformemente, dado que

$$\| \mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_{n-1}(x) \| \leq M_n = \frac{M}{K} \frac{[K (x - x_o)]^n}{n!}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{K} \frac{[\,K\,(\,x - x_o\,)\,]^n}{n!}$$

$$= \frac{M}{K} \exp\,(\,K\,(\,x - x_o\,)\,)$$

y esto pasa para todo $x \in [\,x_o - h\,,\,x_o + h\,]$.

Reiterando entonces los pasos efectuados en la demostración del Teorema de existencia de Peanno Picard (Sección 6, Unidad I) se completa la prueba.

q.e.d.

Este teorema, junto con el Teorema de Peanno Picard, permite llevar un profundo estudio de los sistemas lineales. Además posibilita aplicar los conceptos aprendidos en álgebra lineal.

Hasta ahora hemos probado que cualquier función $\mathbf{z}$ de clase $C^{(1)}$ definida en algún subintervalo de I que es solución de $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{b}$ se extiende a una función de clase $C^{(1)}$ en I, que además es solución de la ecuación.

Sea

$$S_b = \{\, f : I \longrightarrow \mathbb{R}^k \text{ de clase } C^{(1)} \;:\; f \text{ es solución de } \mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{b} \,\};$$

esto es, S_b es *la solución general del sistema no homogéneo* $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{b}$, en términos tradicionales. Luego, S_b está contenido en el espacio vectorial $C^{(1)}(\,I\,,\,\mathbb{R}^k\,)$ de funciones de clase $C^{(1)}$ de I en $\mathbb{R}^k$.

PROPOSICION : 1) Si $\mathbf{b} \equiv 0$, S_0 es un subespacio de $C^{(1)}(\,I\,,\,\mathbb{R}^k\,)$, y además $\dim S_0 = k$.

2) Si $\mathbf{b}$ es cualquier función, S_b es una

subvariedad afín de $C^{(1)}(I , \mathbb{R}^k)$ cuya dimensión es k .

Dem : 1) Veamos primero que S_0 es un subespacio. Sean f, $g \in S_0$, entonces $f' = A f$; $g' = A g$. Luego,

$$(f + \alpha g)' = f' + \alpha g' = A f + \alpha A g = A (f + \alpha g) , \alpha \in \mathbb{R}$$

Así, S_0 es subespacio de $C^{(1)}(I , \mathbb{R}^k)$.

Para probar que $\dim S_0 = k$, exhibiremos una transformación lineal de $\mathbb{R}^k$ en S_0 biyectiva. Para esto, fijamos $x_o \in I$. Para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$, sea $\mathbf{y}_{x_o,v}$ la única solución de $\mathbf{y}' = A \mathbf{y}$ tal que $\mathbf{y}_{x_o,v}(x_o) = \mathbf{v}$. Consideremos entonces la función $T : \mathbb{R}^k \longrightarrow S_0$ que le asigna al vector $\mathbf{v}$ la función $\mathbf{y}_{x_o,v}$; esto es, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{y}_{x_o,v}$. Como vemos, está bien definida puesto que $\mathbf{y}_{x_o,v}$ es la única solución de $\mathbf{y}' = A \mathbf{y}$ que en x_o vale $\mathbf{v}$.

Para probar que T es lineal debemos comprobar que

$$T(\mathbf{v} + \alpha \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + \alpha T(\mathbf{w}) \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^k , \alpha \in \mathbb{R}).$$

Esto es, comprobar la igualdad de las funciones

$$\mathbf{y}_{x_o,v+\alpha w} , \quad \mathbf{y}_{x_o,v} + \alpha \mathbf{y}_{x_o,w} ,$$

lo que equivale a verificar que

$$\mathbf{y}_{x_o,v+\alpha w}(x) = \mathbf{y}_{x_o,v}(x) + \alpha \mathbf{y}_{x_o,w}(x) \qquad \forall x \in I .$$

Cómo hacemos esto ? Peanno Picard nos da la respuesta. Dos funciones $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}^k$ que son soluciones de $\mathbf{y}' = A \mathbf{y} + \mathbf{b}$ coinciden si ¡¡ coinciden en un punto !!.

Ahora

$$\mathbf{y}_{x_o,v+\alpha w}(x_o) = \mathbf{v} + \alpha\ \mathbf{w} = \mathbf{y}_{x_o,v}(x_o) + \alpha\ \mathbf{y}_{x_o,w}(x_o)$$

Además,

$$\mathbf{y}_{x_o,v+\alpha w} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_{x_o,v} + \alpha\ \mathbf{y}_{x_o,w}$$

son soluciones de $\mathbf{y}' = A\ \mathbf{y}$, por tanto coinciden en todo punto y resulta que T es lineal.

Veamos ahora que T es suryectiva. Sea $\mathbf{y} \in S_0$. Entonces $\mathbf{v} = \mathbf{y}(x_o) \in \mathbb{R}^k$. Ahora, las funciones $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_{x_o,v}$ son soluciones de la ecuación $\mathbf{y}' = A\ \mathbf{y}$ que coinciden para $x = x_o$ entonces por Peanno Pícard coinciden en todo punto; esto es,

$$\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}_{x_o,v} = T(\mathbf{y}(x_o))$$

y T es suryectiva.
Pasemos ahora a probar que es uno a uno. Para ello consideremos $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, entonces $T(\mathbf{v}) = \mathbf{y}_{x_o,v} \equiv 0$. Así,

$$\mathbf{y}_{x_o,v}(x) = 0,\ \forall\ x \in I.$$

En particular resulta $\mathbf{y}_{x_o,v}(x_o) = \mathbf{0}$, de lo cual resulta $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Así, hemos establecido una biyección entre $\mathbb{R}^k$ y S_0, con lo cual tenemos que $\dim S_0 = k$.

2) Fijemos nuevamente $x_o \in I$, $\mathbf{y}_o \in \mathbb{R}^k$ y f_o la única solución de $\mathbf{y}' = A\ \mathbf{y} + \mathbf{b}$ tal que $f_o(x_o) = \mathbf{y}_o$. Veamos entonces que $S_b = f_o + S_o$; esto es, todo elemento arbitrario de S_b es igual a la función f_o más un elemento arbitrario de S_o. Para verificarlo usaremos linealidad y Peanno Picard.

i) $S_b \subset f_o + S_o$, pues sea $f \in S_b$, entonces $f - f_o$ es solución de la ecuación homogénea $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$. Como

$$f = f_o + (f - f_o),$$

resulta que $f \in f_o + S_o$.

ii) $f_o + S_o \subset S_b$, pues sea $f \in f_o + S_o$, entonces $f = f_o + h$ ($h \in S_o$). Luego,

$$f' = f_o' + h' = (A\, f_o + \mathbf{b}) + A\, h$$
$$= A\,(f_o + h) + \mathbf{b} = A\, f + \mathbf{b},$$

con lo cual $f \in S_b$.

Esto prueba (2).

q.e.d.

En el lenguaje tradicional, la condición (2) nos dice que :

la solución general del sistema no homogéneo es igual a una solución particular del sistema lineal no homogéneo más la solución general del sistema lineal homogéneo.

La condición (1) nos dice que :

El conjunto solución = (la solución general) de un sistema lineal homogéneo "depende de k-parámetros", puesto que si $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ *es una base de* S_o *, un elemento arbitrario de* S_o *es*

$$\alpha_1\,\mathbf{y}_1 + \ldots + \alpha_k\,\mathbf{y}_k \ , \quad \alpha_j \in \mathbb{R} \ , \ 1 \le j \le k.$$

Usualmente, como solución particular del sistema lineal no homogéneo se toma la única f_o tal que $f_o(x_o) = \mathbf{0}$ (el vector nulo !).

En el caso en que $A(x) = A$, $\forall\, x \in I$; esto es, A es la función constante de valor A, Peanno en 1888 encontró una forma explícita y muy bonita para las soluciones de $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Comencemos con el caso homogéneo, **es decir** $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$. Procedamos construyendo la solución $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o$ por el método de aproximaciones sucesivas. De esto,

$$\mathbf{y}_o(x) = \mathbf{y}_o(x_o) = \mathbf{y}_o \quad , \ \forall\, x .$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F(s, \mathbf{y}_o)\, ds \\ &= \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} A\,\mathbf{y}_o\, ds \\ &= \mathbf{y}_o + (x - x_o)\, A\,\mathbf{y}_o . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2(x) &= \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} F(s, \mathbf{y}_1(s))\, ds \\ &= \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} A\,(\mathbf{y}_o + (s - x_o)\, A\,\mathbf{y}_o)\, ds \\ &= \mathrm{y}_o + A\,\mathrm{y}_o \int_{x_o}^{x} ds + A^2\,\mathbf{y}_o \int_{x_o}^{x} (s - x_o)\, ds \\ &= \mathbf{y}_o + (x - x_o)\, A\,\mathbf{y}_o + \frac{(x - x_o)^2}{2}\, A^2\,\mathbf{y}_o \end{aligned}$$

En general, por inducción se prueba que :

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_o + (x - x_o)\, A\,\mathbf{y}_o + \dots + \frac{(x - x_o)^n}{n!}\, A^n\,\mathbf{y}_o$$

Por consiguiente, formalmente

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_o)^n}{n!}\, A^n\,\mathbf{y}_o$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_o)^n}{n!} A^n \right) \mathbf{y}_o$$

$$= \exp\left((x - x_o) A \right) \mathbf{y}_o .$$

Para justificar las etapas podemos proceder del modo siguiente: para cada matriz $C \in \mathbb{R}^{kxk}$, la serie de término general $\frac{C^n}{n!}$ converge absolutamente, ya que

$$\| C^n \| \le \| C \|^n \quad (\text{pues } \| T S \| \le \| T \| \, \| S \|)$$

entonces,

$$\left\| \frac{C^n}{n!} \right\| \le \frac{\| C \|^n}{n!}$$

Por Análisis I , la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| C \|^n}{n!}$ converge. Como una serie en $\mathbb{R}^{kxk}$ absolutamente covergente es convergente, se tiene que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| C \|^n}{n!}$ con- verge a un elemento de $\mathbb{R}^{kxk}$. A este elemento lo denominamos la **exponencial de la matriz** C y se lo denota por exp(C). De esto,

$$\exp(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!} .$$

LEMA : Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$. Entonces la serie en $\mathbb{R}^k$ de término general

$$\left(\frac{\overbrace{C \circ \ldots \circ C}^{n \text{ veces}}}{n!} \right)(\mathbf{y})$$

converge, y su límite es $\exp(C)(\mathbf{y})$. En otras palabras,

$$\exp(C)(\mathbf{y}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!} \right)(\mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n(\mathbf{y})}{n!} .$$

<u>Dem :</u> Claramente, si $T_n \longrightarrow T$ en $\mathbb{R}^{k\times k}$, entonces $T_n(\mathbf{y}) \longrightarrow T(\mathbf{y})$ en $\mathbb{R}^k$, pues

$$\| T(\mathbf{y}) - T_n(\mathbf{y}) \| \leq \| T - T_n \| \, \| \mathbf{y} \|$$

y $\| T - T_n \| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Aplicando esta afirmación a $T_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{C^p}{p!}$ y recordando que $T_n(\mathbf{y}) = \sum_{p=0}^{n} \frac{C^p(\mathbf{y})}{p!}$ resulta que

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{C^p(\mathbf{y})}{p!} \longrightarrow \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{C^p}{p!} \right)(\mathbf{y})$$

o bien

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{C^p(\mathbf{y})}{p!} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{C^p}{p!} \right)(\mathbf{y}) .$$

q.e.d.

Nótese que $\exp(\mathbf{0}) = I$ = matriz identidad.

Todo esto permite concluír que la solución de $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$ (A constante) que en x_o pasa por $\mathbf{y}_o$ es

$$\mathbf{y}_{x_o, y_o}(x) = \exp\left((x - x_o) A \right)(\mathbf{y}_o).$$

Ahora estamos en condiciones de dar una base explícita del conjunto $S_0 = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k \ / \ f' = A f \}$, con ($A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ fija)

PROPOSICION : Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ una base de $\mathbb{R}^k$. Entonces las funciones

$$\mathbf{y}_1(x) = \exp(xA)(\mathbf{v}_1) , \ \ldots \ , \mathbf{y}_k(x) = \exp(xA)(\mathbf{v}_k)$$

constituyen una base de S_o .

Dem : Sabemos que las soluciones de $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$ son de la forma

$$\exp(xA)(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_{\mathbf{v}}(x) \ ; \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k \ \text{ y } \ \mathbf{x}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v} \ .$$

Ahora, como $\mathbf{v}_1 , \ldots , \mathbf{v}_k$ es base de $\mathbb{R}^k$, existen números reales $c_1 , \ldots , c_k$ tales que

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{v}_j$$

De esto,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathbf{v}}(x) &= \exp(xA)(\mathbf{v}) \\ &= \sum_{j=1}^{k} c_j \exp(xA)(\mathbf{v}_j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{y}_j \right) (x) \ . \end{aligned}$$

Así, $\mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k$ generan S_o . Como $\dim S_o = k$, por álgebra lineal resulta que $\mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k$ es una base de S_o

q.e.d.

Calculemos algunos ejemplos concretos.

EJEMPLO : Si A es una matriz diagonal con elementos diagonales $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, resulta

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix} \ ; \ A^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^2 \end{bmatrix} \ ; \ \ldots \ ; \ A^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

De esto,

$$\exp(xA) = \begin{bmatrix} e^{(x\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(x\lambda_k)} \end{bmatrix}$$

Si $\mathbf{v}_j = (\ 0\ \ldots\ 1\ 0\ \ldots\ 1\ ) = e_j$ = j-ésimo vector de la base canónica en $\mathbb{R}^k$, resulta

$$\mathbf{y}_j(x) = \exp(xA)(e_j) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{(x\lambda_j)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así, las funciones componentes de $\mathbf{y}_j$ son la exponencial o la función nula. Las componentes de $\mathbf{x}_v(x)$ son

$$\mathbf{x}_v(x) = \exp(xA)(\mathbf{v}) = (\ e^{(\lambda_1 x)} v_1\ ,\ \ldots\ ,\ e^{(\lambda_k x)} v_k\ )$$

siendo $\mathbf{v} = (\ v_1\ \ldots\ v_k\ )$.

EJEMPLO : Consideremos ahora

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} ;\ \ldots\ ;\ A^{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\exp(xA) = \begin{bmatrix} 1 & & u_{ij} & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad u_{i,i+k} = \frac{x^k}{k!} .$$

De esto,

$$\mathbf{y}_j(x) = \exp(xA)(e_j)$$

$$= \left(\frac{x^{j-1}}{(j-1)!} , \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} , \dots , \underset{\text{j-esimo}}{\overset{\uparrow}{1}} , 0 , \dots , 0 \right)$$

Por consiguiente, las componentes de $\mathbf{y}_j(x)$ son polinomios en x de grado menor o igual a k .

Trataremos ahora el caso general en el cual $A(x) = A$ (constante) es una matriz cualquiera, para todo x. Para ello denotaremos por :

$$S_{0,\mathbb{R}} = S_0 = \{ f \in C^{(1)}(I, \mathbb{R}^k) \ / \ f' = A f \} ;$$

$$S_{0,\mathbb{C}} = \{ f \in C^{(1)}(I, \mathbb{C}^k) \ / \ f' = A f \}.$$

Veamos algunas relaciones :

1) $S_{0,\mathbb{C}} \supset {}_{0,\mathbb{R}}$; $i\, S_{0,\mathbb{R}} \subseteq S_{0,\mathbb{C}}$.

2) Si $f \in S_{0,\mathbb{C}}$, y escribimos $f = f_1 + i f_2$ con f_j funciones reales, entonces $f_j \in S_{0,\mathbb{R}}$, para $j = 1, 2$.

<u>Dem:</u> $f \in S_{0,\mathbb{C}}$, entonces $f' = A\, f$. Como $f = f_1 + i\, f_2$,

$$f' = \underset{\text{real}}{f'_1} + i\, \underset{\text{real}}{f'_2} = \underset{\text{real}}{A\, f_1} + i\, \underset{\text{real}}{A\, f_2}$$

de lo cual $f'_j = A\, f_j$ para $j = 1, 2$, o de otra forma $f_j \in S_{0,\mathbb{R}}$, para $j = 1, 2$.

q.e.d.

3) $S_{0,\mathbb{C}} = S_{0,\mathbb{R}} + i.\, S_{0,\mathbb{R}}$; esto es, toda solución compleja es una solución real más *i* por otra solución real.

<u>Dem:</u> De lo anterior, $S_{0,\mathbb{C}} \subset S_{0,\mathbb{R}} + i\, S_{0,\mathbb{R}}$.

Si $f_j \in S_{0,\mathbb{R}}$, entonces $f'_1 = A\, f_1$, $f'_2 = A\, f_2$, y así

$$f'_1 + i\, f'_2 = A\, f_1 + i\, A\, f_2 = A\,(\, f_1 + i\, f_2\,).$$

Luego $f_1 + i\, f_2 \in S_{0,\mathbb{C}}$, de lo que concluímos que

$$S_{0,\mathbb{R}} + i\, S_{0,\mathbb{R}} \subset S_{0,\mathbb{C}}.$$

q.e.d.

4) $\dim_{\mathbb{C}} S_{0,\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} S_{0,\mathbb{R}} = k$.

<u>Dem:</u> Sea $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ base de $S_{0,\mathbb{R}}$. Sea $f \in S_{0,\mathbb{C}}$.
Entonces $f = f_1 + i\, f_2$, con f_j reales. Luego, como f_1, f_2 $\in S_{0,\mathbb{R}}$, existen reales c_j, b_j ($1 \le j \le k$) tales que

$$f_1 = \sum_{j=1}^{k} c_j\, \mathbf{y}_j \quad ; \quad f_2 = \sum_{j=1}^{k} b_j\, \mathbf{y}_j$$

Por tanto

$$f = \sum_{j=1}^{k} (c_j + i\, b_j)\, \mathbf{y}_j$$

Así, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ generan $S_{0,\mathbb{C}}$.

$$\text{Si} \quad \sum_{j=1}^{k} (c_j + i\, b_j)\, \mathbf{y}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{j=1}^{k} c_j\, \mathbf{y}_j}_{\text{real}} + i \underbrace{\sum_{j=1}^{k} b_j\, \mathbf{y}_j}_{\text{real}} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} c_j\, \mathbf{y}_j = \sum_{j=1}^{k} b_j\, \mathbf{y}_j = 0$$

$$\Rightarrow c_j = d_j = 0 \quad , \quad 1 \le j \le k .$$

De esto, $\mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k$ son linealmente independientes en $S_{0,\mathbb{C}}$. Así, $\mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k$ es también base de $S_{0,\mathbb{C}}$, y resulta que :

$$\dim_{\mathbb{C}} S_{0,\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} S_{0,\mathbb{R}} = k .$$

q.e.d.

5) Si $f_1 , \ldots , f_k$ es base de $S_{0,\mathbb{C}}$ y escribimos

$$f_j = u_j + i\, \mathbf{v}_j \quad ; \quad 1 \le j \le k, \quad u_j, \mathbf{v}_j \text{ reales},$$

entonces $\{ u_1 , \ldots , u_k , v_1 , \ldots , v_k \}$ genera $S_{0,\mathbb{R}}$.

<u>Dem:</u> Sea $f \in S_{0,\mathbb{R}}$, entonces $f \in S_{0,\mathbb{C}}$ (por lo anterior). Luego existe $c_j \in \mathbb{C}$ ($1 \le j \le k$) tal que

$$f = \sum_{j=1}^{k} c_j\, f_j .$$

Como $c_j \in \mathbb{C}$, sea $c_j = a_j + i\, b_j$, con $a_j , b_j \in \mathbb{R}$. Así,

$$f = \sum_{j=1}^{k} (a_j + i\, b_j) (u_j + i\, v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (a_j u_j - b_j v_j) + i \sum_{j=1}^{k} (a_j v_j + b_j u_j)$$

Como f es real debe ser $\sum_{j=1}^{k} (a_j v_j + b_j u_j) = 0$ de lo cual

$$f = \sum_{=1}^{k} (a_j u_j - b_j v_j) .$$

De esta forma, $\{ u_1 , \ldots , u_k , v_1 , \ldots , v_k \}$ generan $S_{o,\mathbb{R}}$.

q.e.d.

Con esto en mente, construiremos una base de $S_{o,\mathbb{C}}$, y luego una base para $S_{o,\mathbb{R}}$ para el caso $A(x) = A , \forall x$ (constante).

i) Sea

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \lambda_j \in \mathbb{C} .$$

Si $\mathbf{w}_1 , \ldots , \mathbf{w}_k$ es una base de $\mathbb{C}^k$, una base de $S_{o,\mathbb{C}}$ es

$$\exp(xA)\mathbf{w}_1 , \ldots , \exp(xA)\mathbf{w}_k$$

$$\begin{bmatrix} e^{(x\lambda_1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \ldots , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{(x\lambda_k)} \end{bmatrix}$$

$$e^{(\lambda_1 x)}\mathbf{v}_1 , \ldots , e^{(\lambda_k x)}\mathbf{v}_k$$

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos (\beta x) + i\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} (\beta x) ,$$

si $\lambda = \alpha + i\, \beta$, β, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\, \mathbf{v}_j$$

$$e^{(\lambda_j x)} \mathbf{v}_j = e^{(\alpha_j x)} \, (\cos\,(\beta_j x) + i \,\mathrm{sen}\,(\beta_j x) \,) \,(\, \mathbf{u}_j + i\, \mathbf{v}_j \,)$$

Así, un generador de $S_{0,\mathbb{R}}$ es

$$\{\, e^{(\alpha_j x)} \cos\,(\beta_j x)\, \mathbf{u}_j - e^{(\alpha_j x)} \,\mathrm{sen}\,(\beta_j x)\, \mathbf{v}_j \;;$$

$$e^{(\alpha_j x)} \cos\,(\beta_j x)\, \mathbf{v}_j + e^{(\alpha_j x)} \,\mathrm{sen}\,(\beta_j x)\, \mathbf{u}_j \,\}_{j=1}^{k}$$

ii) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Como antes $\mathbf{y}_j(x) = \sum_j (\overset{\text{grado acotado}}{\overset{\uparrow}{\mathrm{Pol}}}(x))\, \mathbf{v}_j$.

iii)Veamos ahora el caso general, esto es, A arbitraria. Recordemos la Forma de Jordan de A : Existe una base ordenada

$$\mathcal{B} = \{\, \mathbf{v}_1 \,,\, \dots \,,\, \mathbf{v}_k \,\}$$

de $\mathbb{C}^k$ tal que

$$[\, A \,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \varepsilon & 0 \dots 0 \\ & \ddots & \\ & 0 & \ddots \quad 0 \quad \varepsilon \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} \quad \text{con } \varepsilon = 0 \text{ ó } 1 \,.$$

La base del espacio solución es

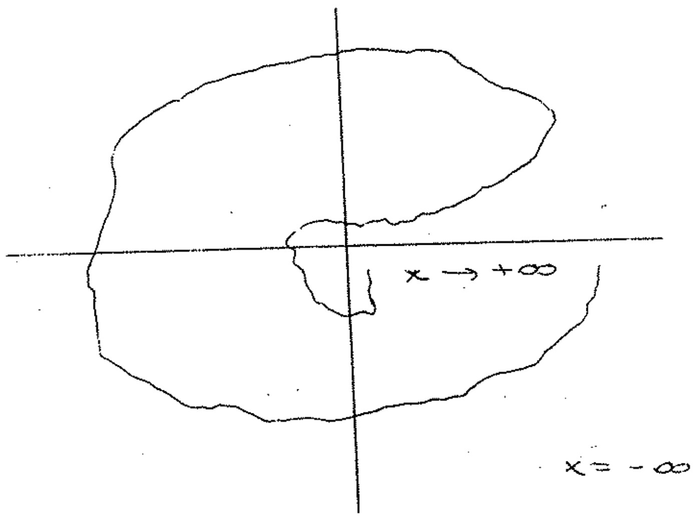
$$\mathbf{y}_j = \exp(xA)\mathbf{v}_j = \exp\, x\, \lambda\, \mathbf{v}_k \,.\, \exp\, x\, N\, \mathbf{v}_k \,.$$

Notar que las componentes de

$$\mathbf{y}_j(x) = \mathrm{Pol}(x)(\, e^{(\alpha_j x)} \cos\,(\beta_j x) \;\text{n}^{\underline{o}}\; e^{(\alpha_j x)} \,\mathrm{sen}\,(\beta_j x) \,)\, \mathrm{Pol}(x) \,.$$

iv) Si $Re(\lambda_j) < 0$, $\forall j$, es decir, si $\alpha_j < 0$ $\forall$ j , entonces las soluciones tienden a cero cuando $x \longrightarrow +\infty$, y tienden a $+\infty$ para $x \longrightarrow -\infty$.

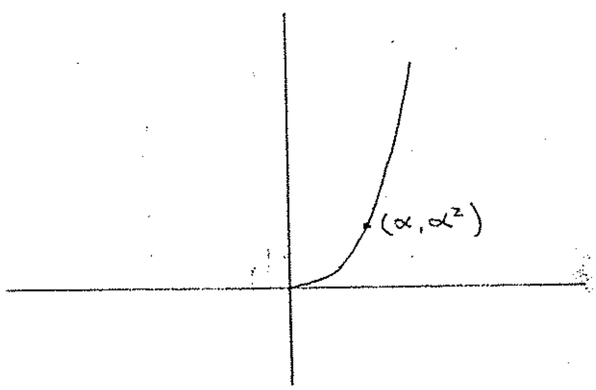
Caso n = 2 : Dibujamos la curva imagen $\mathbf{y}_j(x)$, <u>NO</u> <u>(x, $\mathbf{y}_j(x)$)</u> .



Caso $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$:

$\mathbf{y}_1(x) = (e^{-x} , 0)$; $\mathbf{y}_2(x) = (0 , e^{-2x})$

Dibujo de $\mathbf{y}_1(x)$



$$y(x) = a\, y_1 + b\, y_2 = (\, a\, e^{-x},\; b\, e^{-2x}\,) \quad a > 0 \;,\; b > 0 \;;\; b = a^2$$

$$(\, \underbrace{a\, e^{-x}}_{u},\; \underbrace{a^2\, e^{-2x}}_{u^2} \,)$$

Estudiaremos ahora sistemas no homogéneos. Sea $\mathbf{v}_1 , \ldots , \mathbf{v}_k$ una base de $\mathbb{R}^k$. Una base del espacio solución del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$ es :

$$\mathbf{y}_1(x) = \exp(xA)\mathbf{v}_1 \;,\; \ldots \;,\; \mathbf{y}_k(x) = \exp(xA)\mathbf{v}_k$$

Nos hace falta el lema siguiente:

LEMA : Sea $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$ un sistema lineal homogéneo con soluciones $\mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :

1) $\{ \mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k \}$ es linealmente independiente;

2) para algún $x_o \in I$, $\{ \mathbf{y}_1(x_o) , \ldots , \mathbf{y}_k(x_o) \}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^k$;

3) $\{ \mathbf{y}_1(x) , \ldots , \mathbf{y}_k(x) \}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^k$, para cada $x \in I$.

4) La matriz $(\mathbf{y}_1(x) , \ldots , \mathbf{y}_k(x))$ es inversible, para cada $x \in I$.

5) La matriz $(\mathbf{y}_1(x_o) , \ldots , \mathbf{y}_k(x_o))$ es inversible, para algún $x_o \in I$.

<u>Dem :</u>

$1 \Rightarrow 2$) Sea $\sum_{j=1}^{k} c_j \, \mathbf{y}_j(x_o) = 0$ con $c_j \in \mathbb{R}$. Por hipótesis, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k$ son k vectores linealmente independientes, que son soluciones de $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$, entonces forman una base de $S_{0,\mathbb{R}}$. Así,

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \, \mathbf{y}_j(x)$$

es una solución de la ecuación diferencial homogénea, que valuada en x_o es

$$\mathbf{y}(x_o) = \sum_{j=1}^{k} c_j \, \mathbf{y}_j(x_o) = \mathbf{0} \, .$$

Pero como la función nula es una solución de este sistema que también vale cero en x_o resulta, por la unicidad del Teorema de Peanno Picard, que $\mathbf{y}(x) \equiv \mathbf{0}$, $\forall\, x \in I$. Así,

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \, \mathbf{y}_j(x) = 0 \;,\; \forall\, x \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{k} c_j \, \mathbf{y}_j \equiv 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \ldots = c_k = 0 \, .$$

Luego, $\{\, \mathbf{y}_1(x_o) \,,\, \ldots \,,\, \mathbf{y}_k(x_o) \,\}$ es linealmente independiente.

$2 \Rightarrow 3$) Sean $x \in I$, y $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \, \mathbf{y}_j(x) = \mathbf{0} \, .$$

Nuevamente $\mathbf{y}(t) = \sum_{j=1}^{k} c_j \, \mathbf{y}_j(t)$ es solución del sistema, $\forall\, t \in I$, y valuada en x da cero. Luego, por la unicidad de Peanno Picard, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$, $\forall\, t \in I$, entonces $\mathbf{y}(x_o) = 0$. Así,

$\{ \mathbf{y}_1(x) , \ldots , \mathbf{y}_k(x) \}$ es linealmente independiente. Como esto vale para cada $x \in I$, resulta lo pedido.

$3 \Rightarrow 1$) Sean $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ y consideremos

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{y}_j = 0 \text{ (función nula)}.$$

Entonces $\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{y}_j(x) = \mathbf{0}$, $\forall x \in I$. Luego, $c_j = 0$ para $1 \le j \le k$. Así, $\{ \mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k \}$ es linealmente independiente.

Las restantes equivalencias resultan del álgebra lineal.

q.e.d.

Estamos ahora en condiciones de resolver el sistema lineal no homogéneo :

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{b}\ .$$

Para ello construiremos una solución usando una idea de Lagrange que se denomina **método de variación de las constantes**.

Proponemos como solución del sistema no homogéneo

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j(x)\ \mathbf{y}_j(x)$$

donde $\mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k$ son k-soluciones linealmente independientes (base) del sistema homogéneo. Esto puede escribirse como

$$\mathbf{y}(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(x) & \ldots & \mathbf{y}_k(x) \end{bmatrix}}_{\text{vectores}\uparrow\text{columna}} \begin{bmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_k(x) \end{bmatrix} .$$

Haciendo $W(x) = (\mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k)$, resulta

$$\mathbf{y}(x) = W(x) \begin{bmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_k(x) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}'(x) = W'(x) \begin{bmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_k(x) \end{bmatrix} + W(x) \begin{bmatrix} c'_1(x) \\ \vdots \\ c'_k(x) \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{c}(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_k(x) \end{bmatrix}$.

Luego, $\mathbf{y}$ es solución del sistema no homogéneo sí y sólo si

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\ \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x),$$

esto es, sí y sólo si

$$W'(x)\ \mathbf{c}(c) + W(x)\ \mathbf{c}'(x) = A(x)\ W(x)\ \mathbf{c}(x) + \mathbf{b}(x).$$

Ahora,

$$W' = (\mathbf{y}'_1 , \ldots , \mathbf{y}'_k) = (A\ \mathbf{y}_1 , \ldots , A\ \mathbf{y}_k) = A\ W.$$

Luego, $A\ W\ \mathbf{c} + W\ \mathbf{c}' = A\ W\ \mathbf{c} + \mathbf{b}$.

Así, $\mathbf{y}$ es solución del sistema no homogéneo sí y sólo si $W\ \mathbf{c}' = \mathbf{b}$, o bien

$$W(x)\ \ \mathbf{c}'(x) = \mathbf{b}(x) \quad , \quad \forall\ x .$$

Como $\{ \mathbf{y}_1 , \ldots , \mathbf{y}_k \}$ es base de $S_{0,\mathbb{R}}$, por el teorema anterior $W(x)$ es inversible. Así

$$\mathbf{c}'(x) = W^{-1}(x)\ \mathbf{b}(x) \quad , \quad \forall\ x .$$

De ahí,

$$\mathbf{c}(x) = \int_{x_o}^{x} W(s)^{-1}\ \mathbf{b}(s)\ ds.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(x) &= W(x)\ \mathbf{c}(x)\\ &= W(x) \int_{x_o}^{x} W^{-1}(s)\ \mathbf{b}(s)\ ds\\ &= \int_{x_o}^{x} W(x)\ W^{-1}(s)\ \mathbf{b}(s)\ ds\end{aligned}$$

Así, hemos construído la $\mathbf{y}$ que es solución del sistema no homogéneo tal que $\mathbf{y}(x_o) = 0$.

Sea entonces $\mathbf{z}_1(x)$ la solución del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = A\ \mathbf{y}$ que en x_o vale $\mathbf{y}_o$, esto es, $\mathbf{z}_1(x_o) = \mathbf{y}_o$. Entonces

$$\mathbf{z}_2(x) = \mathbf{z}_1(x) + \int_{x_o}^{x} W(x)\ W^{-1}(s)\ \mathbf{b}(s)\ ds$$

es la solución del sistema no homogéneo $\mathbf{y}' = A(x)\ \mathbf{y} + \mathbf{b}$ que en x_o vale $\mathbf{y}_o$.

Si $A(x) = A$, $\forall\ x$ (constante) resulta

$$\mathbf{z}_1(x) = \exp((x - x_o)A)\ \mathbf{y}_o\ , \quad (\ \mathbf{z}_1(x_o) = \mathbf{y}_o\ ).$$

Consideremos la base canónica $e_1, \ldots, e_k$ en $\mathbb{R}^k$. Entonces

$$\begin{aligned}W(x) &= (\ \exp(xA)e_1\ \ \ldots\ \ \exp(xA)e_k\ )\\ &= \exp(xA)\ I = \exp(xA) \quad (I = \text{matriz identidad})\end{aligned}$$

Así, $W(x)^{-1} = \exp(-xA)$. Luego

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_2(x) &= \exp((x-x_o)A)\ \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} \exp(xA)\ \exp(-sA)\ \mathbf{b}(s)\ ds\\ &= \exp((x-x_o)A)\ \mathbf{y}_o + \int_{x_o}^{x} \exp((x-s)A)\ \mathbf{b}(s)\ ds\ .\end{aligned}$$

es una función que nos calcula la solución general del sistema no homogéneo $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{b}$ (A no depende de x !).

PROBLEMAS.

1. Demostrar la siguiente proposición :

Sean P, S, T operadores en $\mathbb{R}^n$. Entonces :

a) Si $Q = P\,T\,P^{-1}$, entonces $e^Q = P\,e^T\,P^{-1}$.

b) Si $S\,T = T\,S$, entonces $e^{S+T} = e^S\,e^T$.

c) $e^{-S} = (\,e^S\,)^{-1}$.

d) Si $n = 2$ y $T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ entonces

$$e^T = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}.$$

Calcular la exponencial de :

2. $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

9. Dar un ejemplo de dos matrices S, T de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$e^{S+T} \neq e^S\,e^T.$$

En cada uno de los siguientes problemas, encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial dada :

11. $X' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X$

12. $X' = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} X$

En cada uno de los siguientes casos, resolver el problema de valor inicial dado.

13. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X \quad ; \quad X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

14. $X' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} X \quad ; \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Encontrar la solución general del siguiente sistema :

15. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} X$.

Resolver el siguiente problema de valor inicial :

16. $X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} X \quad ; \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

En cada uno de los siguientes problemas, encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial dada :

17. $X' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} X$

18. $X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} X$

Resolver el siguiente problema de valor inicial :

19. $X' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X \quad ; \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

UNIDAD III : ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN N.

1. REDUCCION DE ECUACIONES O SISTEMAS DE CUALQUIER ORDEN A UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación diferencial de orden $n = 5$ dada por

$$\operatorname{sen} x + y^{(5)} + y^{(4)} \cos y + y^{(3)} y^2 + y\, y' = 0 \qquad (\text{A})$$

Uno de nuestros objetivos es resolverla a través de un sistema de primer orden. Para ello crearemos nuevas variables :

$$\begin{aligned} x_o &= y \\ x_1 &= x_o' = y' \\ x_2 &= x_1' = y'' \\ x_3 &= x_2' = y''' \\ x_4 &= x_3' = y^{(iv)} \, . \end{aligned}$$

Así, resulta

$$y = x_o$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_o' &= y' = x_1 \\ x_1' &= y'' = x_2 \\ x_2' &= y''' = x_3 \\ x_3' &= y^{(iv)} = x_4 \\ x_4' &= y^{(v)} = - \operatorname{sen} x - x_4 \cos x_o - x_3 x_o^2 - x_o x_1 \, . \end{aligned} \right. \qquad (\text{A})$$

PROPOSICION : Si (I,y) es solución de la ecuación (A), entonces

$$\left(I \; , \; \begin{matrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(IV)} \end{matrix} \right)$$

es solución del sistema (A'), y recíprocamente, se

$$\left(I \; , \; \begin{matrix} x_o \\ \vdots \\ x_4 \end{matrix} \right)$$

es solución del sistema (A'), entonces (I , x_o) es solución de la ecuación (A).

Otro ejemplo de lo que nos ocupará es hallar la solución de un sistema como

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = \cos(y + x') \\ y''' = \exp(y' + x'') \end{array} \right. \qquad (B)$$

Para resolverlo creamos las siguientes variables :

$$x_o = x$$

$$x_1 = x'_o = x'$$

$$y_o = y$$

$$y_1 = y'_o = y'$$

$$y_2 = y'_1 = y''$$

Así,

$$x'_o = x' = x_1$$

$$x'_1 = x'' = \cos(y_o + x_1)$$

$$y'_o = y' = y_1$$

$$y'_1 = y'' = y_2$$

$$y'_2 = y''' = \exp(y_1 + \cos(y_o + x_1))$$

Todo se reduce a resolver el sistema de primer orden

$$\begin{cases} x_1' = \cos(x_1 + y_o) \\ y_2' = \exp(y_1 + \cos(y_o + x_1)) \end{cases} \qquad (B')$$

PROPOSICION : Si $\left(I, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)$ es solución del sistema (B), entonces

$$\left(I \;,\; \begin{matrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ y'' \end{matrix} \right)$$

es solución de (B'). Recíprocamente, si

$$\left(I \;,\; \begin{matrix} x_o \\ x_1 \\ y_o \\ y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right)$$

es solución de (B'), entonces

$$\left(I \;,\; \begin{matrix} x_o \\ y_o \end{matrix} \right)$$

es solución de (B).

2. PROBLEMA DE CAUCHY PARA UNA ECUACION DE ORDEN N.

DATA : $F : D \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^k \times \ldots \times \mathbb{R}^k}_{n-1 \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ localmente lipschitziana en D abierto, y continua allí;

$$(x_o,(\mathbf{y}_o,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{n-1})) \in D, \text{ con } \mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^k .$$

TESIS : Existe un par $(I,\mathbf{y})$ donde I es un intervalo abierto, $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^k$ de clase $C^{(n)}$ tal que :

$$x_o \in I,$$

$$\mathbf{y}(x_o) = \mathbf{y}_o;\ \mathbf{y}'(x_o) = \mathbf{y}_1;\ \ldots;\ \mathbf{y}^{(n-1)}(x_o) = \mathbf{y}_{n-1},$$

$$\mathbf{y}^{(n)}(x) = F(x,\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),\ldots,\mathbf{y}^{(n-1)}(x)),\ \forall\ x \in I .$$

TEOREMA (PEANNO-PICARD) : El Problema de Cauchy para una ecuación de orden n tiene solución y es única; esto es, si (J,f) es otra solución, $f = \mathbf{y}$ en $I \cap J$.(Como se deduce, el concepto de solución maximal subsiste.)

Dem: Transformaremos el Problema de Cauchy para la ecuación de orden n a un Problema de Cauchy para una ecuación de primer orden.

Para ello, creamos nuevas n-variables :

$$(\mathbf{x}_o,\ldots,\mathbf{x}_{n-1}) \in \mathbb{R}^k \times \ldots \times \mathbb{R}^k \text{ (n veces)}.$$

Sea entonces

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{y}(x)$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}'_o = \mathbf{y}'(x)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}'_1 = \mathbf{y}''(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{x}'_{n-2} = \mathbf{y}^{(n-1)}(x)$$

Así,

$$\mathbf{x}'_{n-1} = \mathbf{y}^{(n)}(x) = F(x,\mathbf{x}_o,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1}).$$

Consideremos entonces

$$G(x,\mathbf{x}_o,\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{n-1}) : D \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n\ \text{veces}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n\ \text{veces}}$$

dada por

$$G(x,\mathbf{x}_o,\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{n-1}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ F(x,\mathbf{x}_o,\dots,\mathbf{x}_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Para cada función $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^k$, definimos

$$X_{\mathbf{y}} : I \to \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n\ \text{veces}} \quad \text{por} \quad X_{\mathbf{y}}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

PROPOSICION : $(I,\mathbf{y})$ es solución del Problema de Cauchy para

$$y^{(n)} = F(x,\mathbf{y},\mathbf{y}',\dots,\mathbf{y}^{(n-1)})$$

sí y sólo si (I,X_y) es solución del Problema de Cauchy para $Y' = G(x,Y)$ para la data inicial

$$(x_o,(\mathbf{y}_o,\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_{n-1})) = (x_o,Y_o).$$

Con esta proposición queda demostrada la anterior, vía Peanno Picard.

q.e.d.

3. ECUACION LINEAL DE ORDEN N EN UNA INCOGNITA.

En este caso el valor de k es 1, y la ecuación es del tipo :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \dots + a_o(x)\, y = b(x) \qquad (1)$$

donde $y : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, y además a_j, $b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Para hallar el sistema equivalente hacemos :

$$\begin{aligned} x_o &= y \\ x_1 &= x_o' = y' \\ x_2 &= x_1' = y'' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= x_{n-2}' = y^{(n-1)} \end{aligned}$$

de lo cual resulta

$$\begin{aligned} x_o' &= x_1 = y' \\ x_1' &= x_2 = y'' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}' &= y^{(n)} = b(x) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, x_j \end{aligned} \qquad (2)$$

Esto puede expresarse a través de un sistema lineal como sigue

$$\begin{pmatrix} x_o' \\ x_1' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_o(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Denotando por :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_o \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_o(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

se transforma simplemente en

$$\mathbf{x}' = A(x)\ \mathbf{x} + \mathbf{b}(x) \ , \qquad (4)$$

lo que establece una correspondencia uno a uno entre lo estudiado en la unidad anterior y las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior n > 1. Esto es,

$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, x_j = b(x)$ $a_j : I \to \mathbb{R},\ b : I \to \mathbb{R}$ (I,y) solución	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	$\mathbf{x}' = A(x)\ \mathbf{x} + \mathbf{b}(x)$ $\left(I, \begin{pmatrix} y, \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \right)$ solución

(5)

Así, todo teorema sobre uno de estos problemas se transforma en uno equivalente para el otro. Por ejemplo, las proposiciones :

1) Toda solución de $\mathbf{x}' = A\ \mathbf{x} + \mathbf{b}$ se extiende a una solución definida en I;

2) Si $A(x) = A = cte,\ \forall\ x$, entonces los vectores solución de $\mathbf{x}' = A\ \mathbf{x}$ son de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \text{ con } h_i = \sum x^r e^{\alpha x} ;$$

3) El conjunto $\{ \mathbf{x} : \mathbf{x}' = A(x)\, \mathbf{x} \}$ es un espacio vectorial de dimensión n;

se traducen en :

PROPOSICION 1 : Toda solución de $y^{(n)} + \sum a_j y^{(j)} = b$ se extiende a soluciones definidas en I. Esta extensión es única.

PROPOSICION 2: La solución de la ecuación es de la forma $y(x) = \sum x^r \exp(\alpha x)$.

PROPOSICION 3: El conjunto

$\{ y : I \to \mathbb{R}$ tal que y es solución de $y^{(n)} + \sum a_j y^{(j)} = 0 \}$

es un espacio vectorial de dimensión n.

Verifiquemos entonces todas estas afirmaciones.

PROPOSICION 1 : <u>Dem:</u> Sea $y : J \to \mathbb{R}$ solución de (1), y consideremos

$$\mathbf{x}_y = (y, y', \ldots , y^{(n-1)}) = (x_o, x_1, \ldots . x_{n-1}) \tag{6}$$

Es claro que $\mathbf{x}_y : J \to \mathbb{R}^n$, y es de clase $C^{(1)}$ dado que $y^{(n-1)}$ es de clase $C^{(1)}$, e $y^{(k)}$ es de clase $C^{(n-k)}$.

Es obvio que ($\mathbf{x}_y$, J) es solución de (4). Por lo probado en la unidad anterior, $\mathbf{x}_y$ se extiende a una función de clase $C^{(1)}$ de I en $\mathbb{R}^n$ que es solución de (4). Por tanto, $x_o = y : J \to \mathbb{R}$ se extiende a una función denotada nuevamente por $y : I \to \mathbb{R}$. Veamos que $x_o = y$ es de clase $C^{(n)}$. Notemos que en el intervalo I se tiene

$$x'_o = x_1 \ ; \ x'_1 = x_2 \ ; \ \ldots \ ; \ x'_{n-2} = x_{n-1}.$$

Por tanto la derivada de x_o, es decir x_1, es derivable y su derivada es x_2 ; de esto x_o es al menos de clase $C^{(2)}$. Como x'_2 existe y es x_3 , x_o es tres veces derivable. Por inducción resulta $x_{n-2} = x_o^{(n-2)}$ derivable con derivada x_{n-1} , de los cual $x_o^{(n-1)}$ existe. Finalmente

$$x'_{n-1} = b - \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_j$$

de lo cual resulta que $x_o^{(n)}$ existe y es igual a

$$b - \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_o^{(j)}.$$

Por tanto, y se extiende a una solución $y : I \to \mathbb{R}$ de (1).

Veamos ahora la unicidad. Formalmente probaremos el siguiente :

LEMA : Si $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ resuelven (1), y $f = g$ en un intervalo abierto $J \subset I$, entonces $f = g$ en I .

<u>Dem:</u> Sean $\mathbf{x}_f$, $\mathbf{x}_g$ como antes. Fijemos $x_o \in J$. Como J es abierto se tiene que

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x) \quad , \quad \forall\, x \in J \quad , \quad k = 0, \ldots, n.$$

De esto,

$$f^{(k)}(x_o) = g^{(k)}(x_o) \quad , \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{x}_f(x_o) = \mathbf{x}_g(x_o) .$$

Recordando que si dos soluciones de (4) coinciden en un punto entonces coinciden en todo punto, resulta que $f = g$ en I .

q.e.d.

Con esto se concluye la demostración de la Proposición 1.

q.e.d.

PROPOSICION 3: Dem: Si $f \in S_o$, sea

$$\mathbf{x}_f = (f, \ f', \ \ldots \ , f^{(n-1)}).$$

Es fácil verificar que la aplicación $f \longmapsto \mathbf{x}_f$ es lineal y una biyección entre el espacio S_o y el espacio solución de $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$. Con esto se prueba que, siendo

$$S_{o,\mathbb{R}\ (ó\ \mathbb{C})} = \{ y : I \to \mathbb{R}\ (ó\ \mathbb{C}),\ \text{clase } C^{(n)} \text{ tal que } y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, y^{(j)} \equiv 0 \} ;$$

$$S_{b,\mathbb{R}\ (ó\ \mathbb{C})} = \{ y : I \to \mathbb{R}\ (ó\ \mathbb{C}),\ \text{clase } C^{(n)} \text{ tal que } y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, y^{(j)} = b \} .$$

i) $S_{o,\mathbb{R}(ó\mathbb{C})}$ es un $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) espacio vectorial de dimensión n.

ii) $S_{b,\mathbb{R}(ó\mathbb{C})}$ es un $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) espacio afín de dimensión n.

iii) Si fijamos $f_o \in S_b$, $S_b = S_o + f$.

q.e.d.

PROPOSICION 2: Dem: Para el caso $a_i(t) = a_i$ = constante, para todo t, el sistema $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$ resulta de coeficientes constantes. Para el sistema $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$ en base a la forma de Jordan construímos bases explícitas de su espacio solución. En particular probamos que las componentes de

$$\mathbf{x}(t) = (x_0(t) \; , \; \ldots \; , \; x_{n-1}(t)) \qquad (7)$$

son combinaciones lineales de funciones del tipo $t^r e^{\lambda t}$.

Esto sugiere estudiar bajo qué condiciones en λ y r, $t^r e^{\lambda t}$ es solución de

$$y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b \qquad (8)$$

donde los a_i son constantes.

Comencemos con $e^{\lambda t}$.

$$(e^{\lambda t})^{(i)} = \lambda^i e^{\lambda t} .$$

Luego, $e^{\lambda t}$ es solución de (8) sí y sólo si

$$e^{\lambda t} [\lambda^n + a_{(n-1)} \lambda^{(n-1)} + \ldots + a_1 \lambda + a_0] \equiv 0 .$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$, $\forall$ t, $\forall$ λ, resulta que $e^{\lambda t}$ es solución de (8) sí y sólo si λ es raíz del polinomio

$$P(x) = x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x + a_0 . \qquad (9)$$

Si las raíces de este polinomio son todas distintas, es decir, tiene n raíces distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ya sabemos que

$$\exp(\lambda_1 t) \; , \; \ldots \; , \; \exp(\lambda_n t)$$

pertenecen al espacio solución

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, y^{(i)} = 0 \ .$$

Veamos que $\{ \exp(\lambda_1 x) \ , \ \ldots \ , \ \exp(\lambda_n x) \}$ es una base. Para ello un poco de abstracción simplificará el trabajo.

Para cada polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, sea $P(D)$ el operador lineal de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en sí mismo definido por

$$P(D)f = \sum_{i=0}^{n} a_i\, f^{(i)}. \qquad (10)$$

EJEMPLO : Si $P(x) = x^2 - x + 1$, resulta

$$P(D)f = f'' - f' + f \ .$$

Si $P \equiv 1$, $P(D)f = f =$ (operador identidad)(f).

Si $P = RS$, entonces $P(D) = R(D) \circ S(D)$, esto es,

$$(RS)(D)(y) = (R(D) \circ S(D))(y) \ , \ \forall\, y \ . \qquad (11)$$

<u>Dem:</u> Sean $R = \sum a_i\, x^i$, $S = \sum b_i\, x^i$.

$$RS = \sum_i \left(\sum_{\substack{l,k \\ l+k=i}} a_l\, b_k \right) x^i$$

entonces

$$(RS)(D)(y) = \sum_i \left(\sum_{l+k=i} a_l\, b_k \right) y^{(i)}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(R(D) \circ S(D))(y) &= R(D)(S(D)(y)) \\ &= R(D) \left(\sum_j b_j\, y^{(j)} \right) \\ &= \sum_j b_j\, (R(D)(y^{(j)}))\end{aligned}$$

$$= \sum_j b_j \left(\sum_p a_p \, (y^{(j)})^{(p)} \right)$$

$$= \sum_j b_j \left(\sum_p a_p \, y^{(j+p)} \right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_{j+p=i} b_j \, a_p \right) y^{(i)}$$

$$= (RS)(D)(y) \quad , \quad \forall \, y \, .$$

q.e.d.

Si $P = R + S$, entonces $P(D) = R(D) + S(D)$. (12)

Dem: $(R + S)(D)(y) = \sum_j (a_j + b_j) \, y^{(j)}$

$$= \sum_j a_j \, y^{(j)} + \sum_j b_j \, y^{(j)}$$

$$= R(D)(y) + S(D)(y)$$

$$= (R(D) + S(D))(y) \quad , \quad \forall \, y \, .$$

En lenguaje algebraico, la aplicación $P \longmapsto P(D)$ del álgebra de polinomios de variable x en operadores lineales de $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un homomorfismo de álgebras.

Para cada P, denotemos

$$S_P = \{ \, y \, : \, P(D)(y) = 0 \, \}. \qquad (13)$$

LEMA : Si P y Q son polinomios coprimos, entonces

$$S_{PQ,\mathbb{C}} = S_{P,\mathbb{C}} \oplus S_{Q,\mathbb{C}} \; ; \qquad (14)$$

esto es : 1) $S_{P,\mathbb{C}}$, $S_{Q,\mathbb{C}} \subset S_{PQ,\mathbb{C}}$,

2) $\forall \, y \in S_{PQ,\mathbb{C}}$, $y = y_1 + y_2$, con $y_1 \in S_{P,\mathbb{C}}$, $y_2 \in S_{Q,\mathbb{C}}$

3) $S_{P,\mathbb{C}} \cap S_{Q,\mathbb{C}} = \{ 0 \}$.

Dem: 1) Si $y \in S_{P,\mathbb{C}}$, entonces $P(D)(y) = 0$. Así,

$$(PQ)(D)(y) = (P(D)Q(D))(y) \underset{\text{polinomios que conmutan}}{=} (Q(D)P(D))(y)$$

$$= Q(D)(P(D)(y)) = Q(D)(0) = 0,$$

con lo cual resulta que $y \in S_{PQ,\mathbb{C}}$.

2) Como P y Q son coprimos, existen polinomios R, S tales que $1 = PR + QS$. Luego,

$$id = P(D)R(D) + Q(D)S(D) .$$

Sea $y \in S_{PQ,\mathbb{C}}$, entonces

$$y = P(D)R(D)(y) + Q(D)S(D)(y) .$$

Ahora, sean

$$y_1 = Q(D)S(D)(y) \quad ; \quad y_2 = P(D)R(D)(y) .$$

Así,

$$\begin{aligned} P(D)(y_1) &= P(D)(Q(D)S(D)(y)) \\ &= (P(D)Q(D)S(D))(y) \\ &= (S(D)P(D)Q(D))(y) \\ &= S(D)(P(D)Q(D))(y) \\ &= S(D)(0) = 0. \end{aligned}$$

Luego, $y_1 \in S_{P,\mathbb{C}}$.

Análogamente, $Q(D)(y_2) = 0$, de lo que resulta $y_2 \in S_{Q,\mathbb{C}}$.

De esto, $y = y_1 + y_2$, con $y_1 \in S_{P,\mathbb{C}}$, $y_2 \in S_{Q,\mathbb{C}}$

3) Para probarlo usaremos el siguiente :

TEOREMA : W_1, $W_2 \subset V$ subespacios, entonces

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) .$$

Como $\dim S_{P,\mathbb{C}} = \text{grado } (P)$, $\dim S_{Q,\mathbb{C}} = \text{grado}(Q)$,

$$\dim (S_{P,\mathbb{C}} + S_{Q,\mathbb{C}}) = \dim (S_{PQ,\mathbb{C}}) = \text{grado } (PQ) .$$

Por tanto,

$$\dim (S_{P,\mathbb{C}} \cap S_{Q,\mathbb{C}}) = 0,$$

y de esto

$$S_{P,\mathbb{C}} \cap S_{Q,\mathbb{C}} = \{ 0 \} .$$

q.e.d.

COROLARIO : Si $P = P_1 \ldots P_r$ son coprimos, es decir, $\text{mcd}(P_1, \ldots, P_r) = 1$, entonces

$$S_P = S_{P_1} \oplus \ldots \oplus S_{P_r} . \qquad (15)$$

Lo importante de esto es que : Si β_i es base de los S_{P_i}, entonces $\beta = \bigcup_{i=1}^{r} \beta_i$ es base de S_P .

Recordemos ahora el

TEOREMA DE GAUSS : Todo polinomio P es de la forma

$$P = (x - \lambda_1)^{s_1} (x - \lambda_2)^{s_2} \ldots (x - \lambda_r)^{s_r} \qquad (16)$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$, $n = \sum_{j=1}^{r} s_j$ en $\mathbb{C}$.

COROLARIO : Si $P = \prod_{j=1}^{r} (x - \lambda_j)^{s_j}$, entonces

$$S_P = S_{(x-\lambda_1)^{s_1}} \oplus \dots \oplus S_{(x-\lambda_r)^{s_r}} . \qquad (17)$$

Así, para construír una base de S_P basta hallar explícitamente una base de

$$S_{(x-\lambda)^s} = \{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ de clase } C^\infty \ / \ (D - \lambda)^s(y) = 0 \},$$

siendo $D = \frac{d}{dx}$.

SUBLEMA : $(D - \lambda)^n(e^{\lambda x}y) = e^{\lambda x} D^n(y)$. (18)

<u>Dem:</u> (por inducción sobre n).

<u>n = 1</u> : $(D - \lambda)(e^{\lambda x}y) = D(e^{\lambda x}y) - \lambda e^{\lambda x}y$

$$= \lambda e^{\lambda x}y + e^{\lambda x} D(y) - \lambda e^{\lambda x}y$$

$$= e^{\lambda x} D(y) .$$

Supongámoslo válido para n-1. Luego,

$$\begin{aligned}(D - \lambda)^n(e^{\lambda x}y) &= (D - \lambda)((D - \lambda)^{n-1}(e^{\lambda x}y)) \\ &= (D - \lambda)(e^{\lambda x} D^{n-1}(y)) \\ &= e^{\lambda x} D(D^{n-1}(y)) \qquad \text{(caso } n = 1) \\ &= e^{\lambda x} D^n(y) .\end{aligned}$$

Por tanto, el sublema es válido $\forall n \in \mathbb{N}$.

q.e.d.

Con esto,

$$y \in S_{(x-\lambda)^n} \iff (D - \lambda)^n(y) \equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (D - \lambda)^n(e^{\lambda x}\, e^{-\lambda x}\, y) \equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{\lambda x}\, D^n(e^{-\lambda x}\, y) \equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad D^n(e^{-\lambda x}\, y) \equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-\lambda x}\, y \text{ es un polinomio de grado } \leq n-1$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = e^{\lambda x} \times (\text{Polinomio de grado } \leq n-1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = e^{\lambda x} \sum_{r=0}^{n-1} a_r\, x^r = \sum_{r=0}^{n-1} a_r\, x^r\, e^{\lambda x}.$$

Por tanto, una base explícita de $S_{(x-\lambda)^n}$ es $\{ x^j\, e^{\lambda x} \}_{j=0}^{n-1}$

Con esto podemos enunciar el siguiente :

TEOREMA : Si $P(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - \lambda_j)^{s_j}$ en $\mathbb{C}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$, entonces una base de $S_{P,\mathbb{C}}$ es

$$\bigcup_{j=1}^{r} \{ x^k\, e^{\lambda_j x} \}_{k=0}^{s_j - 1}. \qquad (19)$$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son reales, y $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r$ son complejos con parte imaginaria no nula, sea $\lambda_j = \sigma_j + i\, \tau_j$, $j \geq k + 1$, donde $\tau_j \neq 0$, σ_j, $\tau_j \in \mathbb{R}$. Un generador de

$$S_{P,\mathbb{R}} = \{ y \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : P(D)(y) = 0 \}$$

es el conjunto

$$\bigcup_{j=1}^{k} \{ x^j\, e^{\lambda_j x} \}_{j=0}^{s_j - 1} \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{j=k+1}^{r} \{ x^k e^{\sigma_j x} \cos(\tau_j x),\ x^k e^{\sigma_j x} \operatorname{sen}(\tau_j x) \}_{j=0}^{s_j - 1} \right) \tag{20}$$

APLICACION : Si las raíces reales son no positivas y simples, y las raíces complejas son imaginarias puras y simples, toda solución de $P(D)(y) = 0$ es acotada en $(0,\infty)$.

Dem: En este caso $s_j = 1$, $\forall j$, entonces la base del espacio $S_{P,\mathbb{C}}$ es

$$\{ \exp(\lambda_1 x),\ \ldots,\ \exp(\lambda_k x),\ \exp(i\tau_{k+1} x),\ \ldots,\ \exp(i\tau_r x) \},$$

entonces cada función de la base es acotada de lo que resulta que toda solución es acotada en $(0,\infty)$.

q.e.d.

Si se tienen raíces múltiples esto no ocurre, pues aparece en la base el factor x.

PROBLEMAS.

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones :

1. $y'' - y = e^{-x}$
2. $y'' + 4\,y' + 4\,y = x^3\, e^{-2x}$
3. $y'' - y = 1$
4. $y'' - 2\,y' + y = e^{x}$
5. $y'' + y' = 4\,x^3 - 2\,e^{2x}$
6. $y'' + 2\,y' + y = x^2\, e^{-x} + 1$

7. Si $\phi(D)$ es un operador polinómico en D con coeficientes constantes, y m es cualquier constante, mostrar que

$$\phi(D) \; e^{mx} = \phi(m) \; e^{mx}.$$

Luego, mostrar que una solución de $\phi(D)\, y = 0$ es $y = e^{mx}$, donde m puede tomar valores que satisfacen $\phi(m) = 0$. Notar que $\phi(m) = 0$ es la ecuación característica.

8. Si a, b son constantes e y_1, y_2 funciones apropiadas de x, mostrar que

$$\frac{1}{\phi(D)} (a\, y_1 + b\, y_2) = a \frac{1}{\phi(D)} y_1 + b \frac{1}{\phi(D)} y_2 .$$

Esto demuestra que $\dfrac{1}{\phi(D)}$ es un operador lineal.

9. Mostrar que si se omiten constantes arbitrarias

$$\frac{1}{\phi(D)} (e^{mx}) = \frac{1}{\phi(m)} (e^{mx}) \; ; \; \phi(m) \neq 0 .$$

Así, evaluar $\dfrac{1}{D^2 - 2\,D - 3} e^{4x}$, y obtener la solución general de la ecuación $y'' - 2\,y' - 3\,y = e^{4x}$.

UNIDAD IV : ESPACIOS DE HILBERT.
SERIES DE FOURIER.

DEFINICION: Sea H un espacio vectorial complejo. Una estructura de **espacio prehilbertiano** en H es una función

$$(\, , \,) : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que $\forall$ v, w, z $\in$ H, y $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$:

1) $(\alpha v + w , z) = \alpha (v , z) + (w , z)$;

2) $(w , z) = \overline{(z , w)}$;

3) $(w , w) \geq 0$; $(w , w) = 0$ sí y sólo si $w = 0$.

EJEMPLO : $C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continuas $\}$ con

$$(f , g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

EJEMPLO : $C^{(1)}[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de clase $C^{(1)} \}$ con

$$(f , g) = \int_a^b (f(x) \overline{g(x)} + f'(x) \overline{g'(x)}) \, dx$$

EJEMPLO :

$\ell^2 = \{ < x_n >_{n\geq 0}$ sucesiones complejas tales que $\sum_{n=0}^{\infty} | x_n |^2 < \infty \}$

con

$$(< x_n > , < y_n >) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n} .$$

EJEMPLO : $H = \{ f \in C^{(1)}[a,b] : f(a) = f(b) = 0 \}$ con

$$(f , g) = \int_a^b (f(x) \overline{g(x)} + f'(x) \overline{g'(x)}) \, dx$$

EJEMPLO : $\mathbb{C}^n$ con $(z , w) = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}$.

DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ-BUNYAKOWSKI.

$$| (v , w) | \leq \| v \| \, \| w \|$$

donde se define $\| v \| = \sqrt{(v , v)}$.

Dem.

$$(\alpha v + \frac{1}{\alpha} w , \alpha v + \frac{1}{\alpha} w) \geq 0 , \ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall v, w \in H$$

$$(\alpha v + \frac{1}{\alpha} w , \alpha v + \frac{1}{\alpha} w) = \alpha \overline{\alpha} (v , v) + (\alpha/\overline{\alpha}) (v , w)$$

$$+ (\overline{\alpha}/\alpha) (w , v) + 1/(\alpha\overline{\alpha}) (w , w)$$

$$= |\alpha|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}((\alpha/\overline{\alpha}) (v , w))$$

$$+ (1/|\alpha|^2) \|w\|^2$$

$$\geq 0 , \ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall v, w \in H$$

Cambiando v por -v resulta

$$|\alpha|^2 \|v\|^2 - 2 \operatorname{Re}((\alpha/\overline{\alpha}) (v , w)) + (1/|\alpha|^2) \|w\|^2 \geq 0 ;$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall v, w \in H$$

Ahora, $(v , w) = | (v , w) | \exp (i\theta)$.

Sea $\alpha = t \exp(-i\theta/2)$, con $t \in \mathbb{R}^+$.

Reemplazando en lo anterior resulta

$$t^2 \|v\|^2 + 1/t^2 \|w\|^2 \geq 2 | (v , w) | ,$$

$$\forall t > 0, \ \forall v, w \in H$$

Sea $\phi(t) = t^2 \|v\|^2 + 1/t^2 \|w\|^2$, $\forall t > 0$.

Entonces $\phi(t) \geq 2 | (v , w) |$, $\forall t > 0$, $\forall v, w \in H$, y así

$$\min_{t>0} \{ \phi(t) \} \geq 2 \mid (v , w) \mid , \forall v, w \in H .$$

Para calcular el mínimo de la función ϕ debemos hallar sus puntos críticos :

$$\phi'(t) = 2 t \|v\|^2 - 2/t^3 \|w\|^2 ;$$

$$\phi''(t) = 2 \|v\|^2 + 6/t^4 \|w\|^2 \geq 0 , \forall t$$

Por tanto existe un mínimo cuando $t^2 = \|w\|/\|v\|$. Así,

$$\phi(\|w\|/\|v\|) \geq 2 \mid (v , w) \mid , \forall v, w \in H .$$

Pero $\phi(\sqrt{\|w\|/\|v\|}) = \|w\|/\|v\| \; \|v\|^2 + \|v\|/\|w\|^2 \; \|w\|^2$, de lo cual

$$2 \|v\| \|w\| \geq 2 \mid (v , w) \mid , \forall v, w \in H ,$$

o bien

$$\|v\| \|w\| \geq \mid (v , w) \mid , \forall v, w \in H .$$

q.e.d.

DESIGUALDAD TRIANGULAR O DE MINKOWSKI.

$$\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \| , \quad \forall v, w \in H .$$

Dem.

$$\begin{aligned} \| v + w \|^2 &= (v + w , v + w) \\ &= (v , v) + (v , w) + (w , v) + (w , w) \\ &= \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} (v , w) + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 \mid (v , w) \mid + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 \| v \| \| w \| + \|w\|^2 \\ &= (\| v \| + \| w \|)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \| .$$

q.e.d.

DEFINICION: Todo espacio prehilbertiano (H , (,)) es un **espacio métrico** definiendo

$$d(v,w) = \| v - w \|$$

DEFINICION: Un espacio (H , (,)) se dice **espacio de Hilbert** si la métrica d es completa.

EJEMPLO : $\tilde{C}[0,2\pi]$, donde

$$d(f,g) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(s) - g(s) |^2 ds \right]^{1/2},$$

no es de Hilbert.

EJEMPLO : $\mathbb{C}^n$ con el producto interno usual :

$$(z , w) = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j} ,$$

es de Hilbert.

Sea $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ tal que $A^* = A = Adj(A)$, y $(Az , z) > 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$ (no nulo), aquí (,) es el producto interno usual.

Sea $h_A(z,w) = (z , w)_A = (Az , w)$. Es fácil ver que h_A es una estructura de espacio prehilbert en $\mathbb{C}^n$, pues

1) $h_A(\alpha v + w , z) = (A (\alpha v + w) , z)$

$$= (\alpha A v + A w , z)$$

$$= \alpha \, (Av , z) + (Aw , z)$$

$$= \alpha \, h_A(v,z) + h_A(w,z)$$

2) $h_A(v,w) = (Av , w) = \overline{(w , Av)} = h_A(w,v)$

3) $h_A(v,v) = (Av , v) \geq 0$, por hipótesis.

$h_A(v,v) = 0 \Rightarrow (Av , v) = 0,$

pero $(Av , v) > 0, \ \forall \ v \in \mathbb{C}^n \ (v \neq 0)$

$$\Rightarrow v = 0.$$

$$\Rightarrow (Av , v) = 0 \Rightarrow h_A(v,v) = 0.$$

TEOREMA: Si $g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es una estructura de espacio prehilbertiano, entonces existe $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ tal que $A^* = A$, $(Az , z) > 0 \ \ \forall \ z \neq 0 \ (z \in \mathbb{C}^n)$ y $g(z,w) = (Az , w) = (z , w)_A \ , \forall \ z, w.$

<u>Dem:</u> Sea $A = (a_{kj})$, con $a_{kj} = g(e_j,e_k)$.

$$(z , w)_A = (Az , w) = \sum_{k=1}^{n} (Az)_k \, \overline{w}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} A_{kj} \, z_j \right] \overline{w}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} g(e_k , e_j) \, z_j \right] \overline{w}_k$$

$$= g\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \, e_j \ , \ \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{w}}_k \, e_k \right)$$

$$= g\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \, e_j \ , \ \sum_{k=1}^{n} w_k \, e_k \right)$$

$$= g(z,w).$$

Así queda probada la existencia de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $g(z,w) = (Az, w)$, $\forall\, z, w$.
El hecho de que $(Az, z) > 0$ para $z \neq 0$ se sigue entonces de las propiedades de los espacios prehilbertianos. Además,

$$(Az, z) > 0 \;\Rightarrow\; A^* = A .$$

q.e.d.

Este teorema es falso si el espacio es de dimensión infinita.

DEFINICION: Sea $(H, (\ ,\ ))$ un espacio prehilbert. Dos vectores $v, w \in H$ se dicen **ortogonales** si $(v, w) = 0$.

DEFINICION: Un conjunto de vectores $S \subset H$ se dice **ortogonal** si $0 \notin S$ y si $\forall\, v, w \in S$, $(v, w) = 0$ $(v \neq w)$. El conjunto S se dice **ortonormal** si es ortogonal y además $\forall\, v \in S$, $\|v\| = 1$.

EJEMPLO : Para $C^{(0)}[0,2\pi]$ con el producto

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$

sea $\dfrac{\exp(inx)}{2\pi} = f_n(x)$. Entonces el conjunto

$$S = \{ f_0,\ f_{\pm 1},\ f_{\pm 2},\ \dots \}$$

es ortonormal. Además,

$$\tilde{S} = \left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{\cos x}{2\pi}, \frac{\operatorname{sen} x}{2\pi}, \dots, \frac{\cos nx}{2\pi}, \frac{\operatorname{sen} nx}{2\pi}, \dots \right\}$$

es ortonormal.

DEFINICION: Sean $(H, (\ ,\ ))$ un espacio prehilbertiano, y $\{e_i\}_{i=1}^N$ un conjunto ortonormal ($N < \infty$ o $N = \infty$). Para todo $v \in H$, definimos el i-ésimo **coeficiente de Fourier** de v respecto de $\{e_i\}_{i=1}^N$ por

$$c_i = (v, e_i) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots$$

PROPOSICION: Si $\dim H = N$ ($N < \infty$), entonces $\forall\, v \in H$,

$$v = \sum_{i=1}^{N} c_i e_i .$$

Dem:

$$\left(v - \sum_{i=1}^{N} c_i e_i \, , e_j \right) = (v, e_j) - \sum_{i=1}^{N} c_i (e_i, e_j)$$

$$= (v, e_j) - c_j$$

$$= (v, e_j) - (v, e_j) = 0,$$

$$1 \le j \le N$$

Como $\dim H = N$, $\{e_i\}_{i=1}^N$ es base de H,

$$\left(v - \sum_{i=1}^{N} c_i e_i \, , w \right) = 0, \ \forall\, w \in H .$$

En particular,

$$\left(v - \sum_{i=1}^{N} c_i e_i \, , v - \sum_{i=1}^{N} c_i e_i \right) = 0$$

entonces

$$v - \sum_{i=1}^{N} c_i e_i = 0, \text{ o bien } v = \sum_{i=1}^{N} c_i e_i .$$

q.e.d.

LEMA: Si S es un conjunto ortonormal, entonces S es linealmente independiente.

Dem: Sea $S = \{ e_i \}_{i=1}^{N}$ un conjunto ortonormal.

Si $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j = 0$, entonces

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j , \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \right) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(e_j , \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{N} \overline{\alpha_k} (e_j , e_k) \right) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2$$

Así, $\alpha_j = 0$, $\forall j$, y resulta S un conjunto linealmente independiente.

q.e.d.

Nos preguntamos entonces si $\dim H = \infty$, y $\{ e_i \}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal implica que para todo $v \in H$,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \quad ?$$

En principio, en un espacio vectorial sólo sabemos sumar un número finito de vectores. Estudiaremos un ejemplo.

Consideremos el espacio ℓ^2 ya citado, con

$$e_i = (0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i-\text{ésimo}}}{0, 1}, 0, \ldots, 0) .$$

Sea $S = \{ e_1, e_2, \ldots \}$. Es fácil ver que este conjunto es ortonormal, pues

$$(e_i, e_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{in} \delta_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

Ahora, si $v = \sum_{i=1}^{N} c_i e_i$, es decir, v es una combinación lineal finita de elementos de S , entonces

$$v = (*, \ldots, *, \overset{\substack{N+1 \\ \uparrow}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ N+2}}{0}, \ldots, 0).$$

Sin embargo, $v = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots) \in \ell^2$, pero v no es combinación lineal de $e_1, \ldots, e_N$ para ningún N. Se tiene que

$$(v, e_i) = 1/i , \forall i,$$

y además

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} (v, e_i) e_i .$$

¿ Qué quiere decir entonces la $\sum_{i=1}^{\infty} (v, e_i) e_i$? Esto se explica del siguiente modo :

Todo espacio prehilbert es un espacio métrico si definimos

$$d(v,w) = + \sqrt{(v-w, v-w)} .$$

EJEMPLO : $C[0,2\pi]$ con $d(f,g) = \left(\int_0^{2\pi} | f(x) - g(x) |^2 dx \right)^{1/2}$.

EJEMPLO : $(\mathbb{C}^n, h_A)$ con $d_A(f,g) = \Big((A(v-w), v-w) \Big)^{1/2}$.

En un espacio métrico sabemos qué significa la convergencia de sucesiones y la igualdad

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} (v, e_i) e_i$$

se interpreta como

$$d\left(v, \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i \right) \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty).$$

En el caso ℓ^2 se tiene

$$d\left(v, \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i \right) =$$

$$= \sqrt{\left(v - \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i , v - \sum_{j=1}^{N} (v, e_j) e_j \right)}$$

$$= \left\| v - \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i \right\|$$

$$= \sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty} |v_i|^2} .$$

Ahora recordemos :

LEMA : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces :

i) $\forall$ N, $\sum_{p=N}^{\infty} a_p$ converge. Denotando su límite por x_N tenemos además,

ii) $\lim_{N\to\infty} x_N = 0$.

Como, en lo anterior, $\sum |v_i|^2 < \infty$ (pues $v \in \ell^2$), resulta que

$$d\left(v, \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i \right) \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty).$$

Esto dice que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (v, e_i) e_i \longrightarrow v$, $\forall v \in \ell^2$.

Para el caso $C[0,2\pi]$, siendo $S = \left\{ f_n(x) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, con

$$f_n(x) = \frac{e^{inx}}{2\pi} ,$$

con el producto interior

$$d(f,g)^2 = \int_0^{2\pi} | f(x) - g(x) |^2 dx ,$$

tenemos

$$c_n = \left(f , \frac{e^{inx}}{2\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-inx) dx.$$

Nos preguntamos nuevamente si

$$d\left(f, \sum_{k=-N}^{N} c_k f_k \right) \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty).$$

Esto equivale a comprobar lo siguiente :

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{e^{ikx}}{2\pi} \right|^2 dx} \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty)$$

con la distancia

$$d_2(h,k) = \left(\int_0^{2\pi} | h - k |^2 \, dx \right)^{1/2},$$

o bien

$$\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{e^{ikx}}{2\pi} \right|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty) .$$

La respuesta es *si*, pero nos llevará algún tiempo probarlo. Los pasos a seguir son :

1) Un estudio cuidadoso de $\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx)$;

2) Probar que $c_n \to 0 \quad (|n| \to \infty)$;

3) Probar que es válido para f de clase $C^{(1)}$;

4) Recordar que toda $f \in C^0$ es límite en distancia media cuadrática de funciones diferenciables.

Comencemos entonces :

1) $$\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} \left(\int_0^{2\pi} f(s) \exp(-iks) \, ds \right) \exp(ikx)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left(\sum_{k=-N}^{N} \exp(ik(x-s)) \right) ds .$$

Definimos $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \exp(ikt)$. A $D_N(t)$ se lo denomina **núcleo de Dirichlet**. Nótese que se trara de la N-ésima suma parcial de una serie geométrica. Resulta entonces

$$D_N(t) = \frac{\exp(i(N+1)t) - \exp(-iNt)}{\exp(it) - 1} .$$

De esto,

$$D_N(t) = \frac{\exp(-it/2)}{\exp(-it/2)} \left(\frac{\exp(i(N+1)t) - \exp(-iNt)}{\exp(it) - 1} \right)$$

$$= \frac{\exp(i(N+1/2)t) - \exp(-i(N+1/2)t)}{\exp(it/2) - \exp(-it/2)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)t)}{\operatorname{sen}(t/2)}.$$

Así,

$$D_N(t) = D_N(-t) .$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)\, D_N(x-s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)(x-s))}{\operatorname{sen}((x-s)/2)}\, ds .$$

Nótese que si $f \equiv \frac{1}{2\pi}$, entonces $c_k = 0$ si $k \neq 0$; $c_0 = 1$. Resulta entonces que la igualdad :

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-s)\, ds$$

implica, para $x = 0$,

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(-s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(s)\, ds$$

y así,

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(t)\, dt \quad , \quad \forall\, N .$$

Además,

$$\lim_{s\to 0} \frac{\text{sen}((N+1/2)s)}{\text{sen}(s/2)} = \lim_{s\to 0} \frac{(N+1/2)s}{s/2} = 2N + 1 = D_N(0) .$$

Por lo tanto,

$$| D_N(0) | \longrightarrow \infty \quad (N \to +\infty) .$$

2) **DESIGUALDAD DE BESSEL** : Sea $(H , (,))$ un espacio prehilbertiano, y $S = \{ e_i \}_{i=1}^{\infty}$ un conjunto ortonormal. Entonces, $\forall\, v \in H$,

$$\sum_{i=1}^{N} | (v, e_i) |^2 \le (v, v) = \| v \|^2 , \ \forall N .$$

Dem: Sea $w = v - \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i = v - \sum_{j=1}^{N} (v, e_j) e_j$.

Por definición de producto escalar, $(w, w) \ge 0$. Ahora

$$0 \le (w, w) = \left(v - \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i , v - \sum_{j=1}^{N} (v, e_j) e_j \right)$$

$$= (v,v) - \sum_{i=1}^{N} (v,e_i) (e_i,v) - \sum_{j=1}^{N} \overline{(v,e_j)} (v,e_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (v,e_i) \left(\sum_{j=1}^{N} \overline{(v,e_j)} (e_i,e_j) \right)$$

$$= (v,v) - \sum_{i=1}^{N} (v,e_i) \overline{(v,e_i)} = (v,v) - \sum_{i=1}^{N} | (v,e_i) |^2$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{N} | (v, e_i) |^2 \le (v, v) , \ \forall N .$$

q.e.d.

Para el caso $C[0,2\pi]$ que estamos tratando, donde

$$S = \left\{ f_k(x) \right\}_{k\in\mathbb{Z}} , \quad \text{con } f_k(x) = \frac{e^{ikx}}{2\pi} ,$$

tenemos que

$$(f, f) \geq \sum_{k=-N}^{N} | c_k |^2 , \quad \forall N .$$

COROLARIO : 1) La serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^2$ converge.

2) $\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0$.

3) Probemos ahora la siguiente :

PROPOSICION : a) Si $f \in C^{(1)}[0,2\pi]$, entonces

$$| c_n | \leq \frac{M}{|n|} ,$$

donde $0 < M < \infty$ depende de f.

b) Si $f \in C^{(2)}[0,2\pi]$, entonces

$$| c_n | \leq \frac{K}{n^2} ,$$

donde $K < \infty$ depende de f .

c) Si $f \in C^{(1)}[0,2\pi]$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right) = f(x) , \quad \forall x.$$

Si $f \in C^{(1)}$, la convergencia es absoluta en $\| \ \|_2$. Además, la convergencia es uniforme.

Dem: a) Sea $f \in C^{(1)}[0,2\pi]$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \exp(-ins)\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{d}{ds} \left(\frac{\exp(-ins)}{(-in)} \right) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} f(s) \frac{\exp(-ins)}{(-in)} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(s) \left(\frac{\exp(-ins)}{(-in)} \right) ds$$

Suponiendo $f(0) = f(2\pi)$ resulta

$$c_n = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(s) \left(\frac{\exp(-ins)}{(-in)} \right) ds$$

$$| c_n | \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{| f'(s) |}{|n|} ds$$

Como $f \in C^{(1)}$, $\exists\, M > 0 : | f'(s) | \le M < \infty$, $\forall$ s. Así,

$$| c_n | \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{|n|} 2\pi = \frac{M}{|n|} .$$

Nótese que, como la serie $\sum 1/n^2$ converge, tenemos una nueva prueba de que para $f \in C^{(1)}$ la serie $\sum |c_n|^2$ converge.

b) Sea $f \in C^{(2)}[0,2\pi]$. Por lo anterior,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^{2\pi} f'(s) \exp(-ins)\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i n} \int_0^{2\pi} f'(s) \frac{d}{ds} \left(\frac{\exp(-ins)}{(-in)} \right) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi in} f'(s) \frac{\exp(-ins)}{(-in)} \Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} f''(s) \frac{\exp(-ins)}{(-in)} ds$$

Como antes, suponiendo $f'(2\pi) = f'(0)$ resulta

$$c_n = \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2\pi} f''(s) \exp(-ins)\, ds$$

Si $f \in C^{(1)}$, la convergencia de la serie de Fourier es uniforme, ya que $c_n = b_n / n$, b_n coeficiente de f', y

$$\sum | c_n | = \sum | \frac{1}{n} | \, | b_n |$$

$$\leq \left(\sum 1/n^2 \right)^{1/2} \left(\sum | b_n |^2 \right)^{1/2} < \infty \text{ , pues } f' \in L^2.$$

Entonces

$$| c_n | \leq \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2\pi} | f''(s) | ds .$$

Como $f \in C^{(2)}[0,2\pi]$, $\exists K > 0 : | f''(s) | < K, \forall s$, con lo cual

$$| c_n | \leq K/n^2 , \forall n .$$

Nótese que para $f \in C^{(2)}$ la serie $\sum c_n \exp(inx)$ converge absolutamente y uniformemente, puesto que

$$| c_n \exp(inx) | \leq K/n^2 \text{ , con } K < \infty ,$$

y por consiguiente hemos arribado a las hipótesis del Teorema de Weierstrass, y por ende, si $f \in C^{(2)}$ la convergencia de la serie es uniforme.

c) Veamos ahora que

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right) = f(x).$$

$$f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) = f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)\, D_N(x-s)\, ds$$

pero restar un número con integrales no parece claro de hacer. Recordemos que

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-s)\, ds.$$

Así,

$$f(x) = \frac{f(x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, D_N(x-s)\, ds.$$

De esto,

$$f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\, f(x) - f(s)\,]\, D_N(x-s)\, ds. \tag{*}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos un $n(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right| < \varepsilon \text{ , si } |N| \geq N(\varepsilon).$$

Para ello, descompondremos la integral del segundo miembro de (*) como sigue :

$$\int_0^{x-\varepsilon} [\, f(x) - f(s)\,]\, D_N(x-s)\, ds + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} [\, f(x) -$$

$$- f(s)\,]\, D_N(x-s)\, ds + \int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon} [\, f(x) - f(s)\,]\, D_N(x-s)\, ds .$$

Ahora,

$$\left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \right) [\, f(x) - f(s)\,]\, D_N(x-s)\, ds =$$

$$= \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \right) [\ f(x)\ -$$

$$- f(s)\ ] \frac{\exp(i(N+1)(x-s)) - \exp(-iN(x-s))}{\exp(i(x-s)) - 1}\ ds =$$

$$= \exp(i(N+1)x) \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \right) \frac{f(x) - f(s)}{\exp(i(x-s))-1} \exp(-i(N+1)s)\ ds\ -$$

$$\exp(-iNx) \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \right) \frac{f(x) - f(s)}{\exp(i(x-s))-1} \exp(iNs)\ ds\ .$$

Consideremos la función

$$\varphi(s) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(s)}{\exp(i(x-s))-1} & \text{si} \quad s \in [0,x-\varepsilon) \cup (x+\varepsilon,2\pi] \\ 0 & \text{si} \quad s \in [x-\varepsilon,x+\varepsilon] \end{cases}$$

Como $x-s \neq 0,\ \forall\ s \notin [x-\varepsilon,x+\varepsilon]$, entonces $[\exp(i(x-s))-1]^{-1}$ está bien definida allí. Como f es acotada, resulta φ acotada, pues

$$\exp(i(x-s))-1 \sim i(x-s)\ ,\ \forall\ s \notin [x-\varepsilon,x+\varepsilon], \text{ entonces}$$

$$|\exp(i(x-s))-1| \sim |x-s| \geq \varepsilon\ , \quad \forall\ s \notin [x-\varepsilon,x+\varepsilon]$$

$$|\exp(i(x-s))-1|^{-1} \leq 1/\varepsilon\ ,\ \forall\ s \notin [x-\varepsilon,x+\varepsilon].$$

Además, φ es continua salvo quizás en $x-\varepsilon$, $x+\varepsilon$ (pues $\varphi(x-\varepsilon) = \varphi(x+\varepsilon) = 0$). Luego,

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \right) [\ f(x) - f(s)\ ]\ D_N(x-s)\ ds =$$

$$= \frac{\exp(i(N+1)x)}{2\pi} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \right) \varphi(s) \exp(-i(N+1)s)\ ds\ -$$

$$\frac{\exp(-iNx)}{2\pi} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \right) \varphi(s) \exp(iNs)\ ds =$$

$$= \frac{\exp(i(N+1)x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \exp(-i(N+1)s)\, ds -$$

$$\frac{\exp(-iNx)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \exp(iNs)\, ds =$$

$$= \exp(i(N+1)x)\, c_{N+1}(\varphi) - \exp(-iNx)\, c_{-N}(\varphi).$$

Entonces

$$\left| \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \right) [\, f(x) - f(s)\,]\, D_N(x-s)\, ds \right| \le$$

$$\le |\, c_{N+1}(\varphi)\, | + |\, c_{-N}(\varphi)\, | < \varepsilon,$$

para $N \geq N(\varepsilon)$ suficientemente grande, por la desigualdad de Bessel, $\forall$ x. Así,

$$\left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right| \le |\, c_{N+1}(\varphi)\, | + |\, c_{-N}(\varphi)\, | +$$

$$+ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon} [\, f(x) - f(s)\,]\, D_N(x-s)\, ds \right|.$$

Ahora,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon} [\, f(x) - f(s)\,]\, D_N(x-s)\, ds \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon} [\, f(x) - f(s)\,]\, \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)(x-s))}{\operatorname{sen}((x-s)/2)}\, ds \right| \le$$

$$\le \left| \frac{1}{2\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon} \frac{2}{x-s} [\, f(x) - f(s)\,]\, \frac{x-s}{2}\, \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)(x-s))}{\operatorname{sen}((x-s)/2)}\, ds \right|$$

Pero $|\operatorname{sen} u / u| \le 1$, $\forall$ u pequeño, y además $|u / \operatorname{sen} u| \le 1$, $\forall$ u pequeño. Adeás, $f \in C^{(1)}$, entonces por el Teorema de Valor Medio existe $\theta \in [s,x]$ tal que

$$|\, f(x) - f(s)\, | = |\, f'(\theta)\, |\, |\, x - s\, |.$$

Además, $\exists\, M > 0 \;:\; |\, f'(\theta)\, | \leq M < \infty \;,\; \forall\, \theta \in [0,2\pi]$. Con todo esto resulta

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon} [\, f(x) - f(s)\,]\, D_N(x-s)\, ds \right| \leq 2\, \varepsilon\, M / \pi$$

Luego,

$$\left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right| < \varepsilon\, (\, 1 + 2\, M / \pi\,), \text{ si } N \geq N(\varepsilon).$$

q.e.d.

OBSERVACION : Las demostraciones anteriores fueron hechas esencialmente por Dirichlet-Riemann a mediados del siglo pasado.

4) Veamos ahora que si $f \in C^0[0,2\pi]$, entonces

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikx) \quad ;$$

donde la convergencia es en la métrica

$$d(f,g)^2 = \int_0^{2\pi} |\, f(x) - g(x)\, |^2\, dx \;.$$

Sea $f \in C^0[0,2\pi]$. Como f es continua, es entonces uniformemente continua. Así,

dado $\varepsilon > 0,\ \exists\, \delta \;:\; |\, x - y\, | < \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(y)\, | < \varepsilon$.

Escribamos $[0,2\pi] = [a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup \ldots \cup [a_r,a_{r+1}]$, donde $a_0 = 0,\ a_{r+1} = 2\pi\ ,\ a_{i+1} - a_i < \delta$. Sea g la poligonal de vértices $(a_i, f(a_i))$, $0 \leq i \leq r+1$. Entonces

$$d(f,g)^2 = \int_0^{2\pi} |\, f(x) - g(x)\, |^2\, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{r+1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} | f(x) - g(x) |^2 dx$$

Si $x \in [a_i, a_{i+1}]$, entonces

$$g(x) = f(a_i) + \frac{x-a_i}{a_{i+1}-a_i} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) .$$

Así,

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x)-f(a_i)| + \left| \frac{x-a_i}{a_{i+1}-a_i} \right| \, | f(a_{i+1}) - f(a_i) |$$

$$< \varepsilon + \frac{|x-a_i|}{a_{i+1}-a_i} \varepsilon = o(\varepsilon),$$

entonces

$$|f(x) - g(x)|^2 < o(\varepsilon^2),$$

digamos,

$$|f(x) - g(x)|^2 < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} | f(x) - g(x) |^2 dx < \varepsilon (a_{i+1} - a_i)$$

$$\int_0^{2\pi} | f(x) - g(x) |^2 dx < \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{i=0}^{r+1} (a_{i+1} - a_i) = \varepsilon.$$

Con un poco de trabajo, g puede modificarse a

$$h \in C^{(1)}[0,2\pi] \text{ tal que } \int_0^{2\pi} | f(x) - h(x) |^2 dx < \varepsilon .$$

(Alisar los puntos de la poligonal).

Sean c_n los coeficientes de Fourier de f, y d_n los correspondientes a h. Por lo ya demostrado,

$$\left| h(x) - \sum_{k=-N}^{N} d_k \exp(ikx) \right| < \varepsilon$$

para todo $x \in [0,2\pi]$, si $N \geq N(\varepsilon)$.

Ahora,

$$\left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right|^2 = \left| f(x) - h(x) + h(x) - \sum_{k=-N}^{N} d_k \exp(ikx) + \sum_{k=-N}^{N} (d_k - c_k) \exp(ikx) \right|^2$$

$$\left\| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right\|_2 = d_2\left(f, \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right)$$

$$= d_2\left(f(x) - h(x) + h(x) - \sum_{k=-N}^{N} d_k \exp(ikx) + \sum_{k=-N}^{N} d_k \exp(ikx), \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right) =$$

$$= \left\| f(x) - h(x) + h(x) - \sum_{k=-N}^{N} d_k \exp(ikx) + \sum_{k=-N}^{N} (d_k - c_k) \exp(ikx) \right\|_2 \leq$$

$$\leq \| f(x) - h(x) \|_2 + \left\| h(x) - \sum_{k=-N}^{N} d_k \exp(ikx) \right\|_2 + \left\| \sum_{k=-N}^{N} (d_k - c_k) \exp(ikx) \right\|_2 <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \left(\int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} |d_k - c_k|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad \text{si} \quad N \geq N(\varepsilon).$$

Ahora, por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=-N}^{N} |d_k - c_k|^2 \leq \| f - h \|^2 < \varepsilon.$$

Así,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx) \right\|_2 < \varepsilon \ , \ \text{si} \quad N \geq N(\varepsilon) .$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikx) \quad \text{en} \quad d_2 .$$

TEOREMA (Carleman-1964) : Para $f \in C^0[0,2\pi]$, la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikx)$$

converge puntualmente a la función f fuera de un conjunto de medida Lebesgue igual a cero.

TEOREMA : Si $f,\ g \in C^0$ con $c_n = d_n$ para todo n, entonces $f \equiv 0$ salvo en un conjunto de medida nula.

PROBLEMAS.

1. a) Determinar las constantes $c_1,\ c_2,\ c_3$ de modo que las funciones

$$f_1(x) = c_1\, x + 2 \quad ; \quad f_2(x) = c_2\, x^2 + c_3\, x + 1 \quad ; \quad f_3(x) = x - 1$$

formen un conjunto ortogonal en $0 \leq x \leq 1$.

b) Normalizar el conjunto hallado.

2. a) Demostrar que :

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left[\frac{k\pi x}{L}\right] dx = \int_{-L}^{L} \cos\left[\frac{k\pi x}{L}\right] dx = 0 \text{ , si } k \in \mathbb{N} .$$

b) Demostrar que :

$$\int_{-L}^{L} \cos\left[\frac{m\pi x}{L}\right] \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi x}{L}\right] \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ , si } m \neq n \\ 1 \text{ , si } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi x}{L}\right] \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx = 0 .$$

[Sugerencia : $\cos A \cos B = 1/2 \{ \cos (A-B) + \cos (A+B) \}$
$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = 1/2 \{ \cos (A-B) - \cos (A+B) \}$
$\operatorname{sen} A \cos B = 1/2 \{ \operatorname{sen} (A-B) + \operatorname{sen} (A+B) \}$].

Nótese que estos resultados siguen valiendo si se reemplazan los límites de integración por c, $c+2L$ respectivamente.

c) Mostrar que el conjunto de funciones :

$$1,\ \operatorname{sen}\left[\frac{\pi x}{L}\right],\ \cos\left[\frac{\pi x}{L}\right],\ \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi x}{L}\right],\ \cos\left[\frac{2\pi x}{L}\right],\ \ldots$$

forma un conjunto ortogonal en el intervalo $(-L, L)$.

d) Determinar las constantes correspondientes de normalización para el conjunto de (c) de tal forma que el conjunto sea ortonormal en $(-L, L)$.

e) Trasladar los resultados anteriores al intervalo $(0, 2\pi)$

3. a) Hallar los coeficientes de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 5 \end{cases} \qquad \text{Período } 10 .$$

b) Escribir la serie de Fourier correspondiente.

c) Cómo habría que definir $f(x)$ en $x = \pm 5$ y en $x = 0$

para que la serie de Fourier converja hacia $f(x)$ (puntualmente) para $-5 \leq x \leq 5$?

4. a) Desarrollar $f(x) = x^2$ para $0 < x < 2\pi$ en serie de Fourier, si el período es 2π .

b) Demostrar que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. a) Si $f(x)$ es una función par, mostrar que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left[\frac{n \pi x}{L}\right] dx \quad ; \quad b_n = 0 \ .$$

b) Extraer una conclusión en el caso de una función f impar.

6. Desarrollar $f(x) = x$, $0 < x < 2$

a) en serie de senos.

b) en serie de cosenos.

c) Escribir la identidad de Bessel que corresponde a la serie de Fourier del inciso (b) .

d) Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

e) Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

UNIDAD V : TEOREMAS DE STURM.

Son relativos a una ecuación del tipo

$$a(t)\, y''(t) + b(t)\, y'(t) + c(t)\, y(t) = 0 \qquad (1)$$

con $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continuas.

TEOREMA :

1) En los intervalos donde $a \neq 0$, la ecuación (1) se puede transformar en una del tipo

$$p(t)\, y'' + p'(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \quad ,$$

con $p(t) > 0,\ \forall\, t \in J$.

2) Una ecuación del tipo

$$p(t)\, y'' + p'(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \ ,\ p(t) > 0 \quad \forall\, t \in I$$

se transforma en una del tipo

$$y'' + \tilde{q}(t)\, y = 0 \ .$$

<u>Dem:</u>

1) Sea $J \subset I$ un intervalo donde $a(t) \neq 0,\ \forall\, t \in J$.

En J, b/a es una función continua. Fijamos $t_o \in J$.

Entonces $\displaystyle\int_{t_o}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}\, ds$ existe, $\forall\, t \in J$, y define una función continua en J.

En J, $a(t)\, y''(t) + b(t)\, y'(t) + c(t)\, y(t) = 0$ equivale a

$$y'' + b/a\, y' + c/a\, y = 0$$

o bien

$$\exp\left(\int_{t_o}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}\, ds\right) y'' + \exp\left(\int_{t_o}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}\, ds\right) \frac{b}{a}\, y' +$$

$$+ \exp\left(\int_{t_o}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}\, ds\right) \frac{c}{a}\, y = 0$$

Basta ahora definir $p(t) = \exp\left(\int_{t_o}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}\, ds\right)$,

$$q(t) = \exp\left(\int_{t_o}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}\, ds\right) \frac{c}{a}$$

2) Sea $y(t) = z(t) / \sqrt{p(t)}$, lo cual es posible dado que $p(t) > 0,\ \forall\ t$.

$$y'(t) = z'(t)/\sqrt{p(t)} - zp'/(2\sqrt{p^3})$$

$$p\, y'' + p'\, y' + q\, y = (p\, y')' + q\, y$$

$$= (p^{1/2}\, z')' - (\, p'\, z\, /(\, 2\, p^{1/2})\,)' + q\, z\, /\, p^{1/2}$$

$$= p^{1/2}\, z'' + h(t)\, z(t)$$

donde $h = \dfrac{q}{p} - \dfrac{(p^{-1/2}\, p'\,)'}{2\, p^{1/2}}$,

Así, y es solución de $(p\, y')' + q\, y = 0$ si y sólo si $z = \sqrt{p}$ y es solución de $z'' + h\, z\, p^{-1/2} = 0$.

q.e.d.

COROLARIO : Una solución y de

$$a(t)\, y''(t) + b(t)\, y'(t) + c(t)\, y(t) = 0$$

se anula en algún punto sí y sólo si la solución z que le corresponde en la ecuación transformada del tipo

$$z'' + h\, z = 0$$

se anula en el mismo punto.

Desde este punto de vista, estudiar cuándo una solución de

$$a(t)\ y''(t) + b(t)\ y'(t) + c(t)\ y(t) = 0$$

se anula es equivalente a estudiar cuándo la solución que le corresponde de la ecuación transformada

$$z'' + h\ z = 0$$

se anula.

ESTUDIO DE LOS CEROS DE SOLUCIONES REALES DE $y'' + q(t)\ y = 0$.

a) Los ceros de una solución no trivial son aislados.

Dem: (por el absurdo)

Supongamos que no son aislados, entonces existen t_n, $t_o \in I$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t_o\ ,\ y(t_n) = y(t_o) = 0.$$

Entonces

$$y'(t_o) = \lim_{n\to\infty} \frac{y(t_n) - y(t_o)}{t_n - t_o} = 0$$

$$y(t_o) = y'(t_o) = 0.$$

Por el teorema de Peanno Picard, $y \equiv 0$, lo cual contradice el hecho de que y es no trivial.

Por lo tanto, los ceros de una solución no trivial son aislados.

q.e.d.

b) **TEOREMA DE STURM :** Sean f, g soluciones reales de

$$y'' + q\ y = 0\ .$$

Supongamos que son linealmente independientes. Entonces entre dos ceros de f hay uno de g.

Dem: Del teorema de Wronski sabemos que

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}$$

satisface la ecuación diferencial lineal homogénea

$$W' + b\,W = 0\ ,\ \text{si}\quad y'' + b\,y' + c\,y = 0.$$

Como $b \equiv 0$, $W'(x) \equiv 0$, $\forall\, x$, de lo cual resulta que W es constante.

Como f, g son linealmente independientes, $W(x) \neq 0$, $\forall\, x$.

Así,

$$W(x) = W_o \neq 0\ ,\ \forall\, x \in I.$$

Sean α, β ceros consecutivos de f. Buscamos γ entre α y β tal que $g(\gamma) = 0$.

Necesitamos probar que $g(\alpha)\ g(\beta) < 0$.

$$W(\alpha) = \det\begin{pmatrix} f(\alpha) & g(\alpha) \\ f'(\alpha) & g'(\alpha) \end{pmatrix} = -\ f'(\alpha)\ g(\alpha)$$

$$W(\beta) = -\ f'(\beta)\ g(\beta)$$

por lo tanto $g(\alpha)\ f'(\alpha) = g(\beta)\ f'(\beta)$. Ahora, como α, β son ceros consecutivos de f se tiene que $\dfrac{f'(\alpha)}{f'(\beta)} < 0$, de lo cual $\dfrac{g(\beta)}{g(\alpha)} < 0$, o bien $g(\alpha)\ g(\beta) < 0$. Por lo tanto, g se anula entre α y β.

q.e.d.

COROLARIO : Si f se anula infinitas veces, g también lo hace.

COROLARIO : Si g no se anula nunca, f tiene a lo sumo un cero.

c) **TEOREMA (DE COMPARACION DE STURM) :**

Si $u(t)$ es una solución de la ecuación $y'' + q_1 y = 0$, y si $v(t)$ es una solución de la ecuación $y'' + q_2 y = 0$, con

$$q_1(t) \leq q_2(t) \ , \ \forall \ t \in I \ , \ y \ q_1 \neq q_2$$

entonces, si α y β son ceros consecutivos de u, v tiene un cero entre α y β.

<u>Dem:</u> Cambiando u por $-u$ si es necesario, podemos suponer que $u(t) > 0$, $\forall \ t \in (\alpha,\beta)$. Análogamente para v.

$$v\,u'' - u\,v'' + (q_1 - q_2)\,u\,v = 0$$

$$v\,u'' - u\,v'' = (q_2 - q_1)\,u\,v$$

$$\int_\alpha^\beta v\,u'' - u\,v'' = \int_\alpha^\beta u\,v\,(q_2 - q_1) > 0$$

$$\int_\alpha^\beta v\,u'' - u\,v'' = v\,u' \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v'\,u' - u\,v' \Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta v'\,u'$$

Así,

$$v(\beta)\,u'(\beta) - v(\alpha)\,u'(\alpha) > 0$$

$$v(\beta)\,u'(\beta) > v(\alpha)\,u'(\alpha)$$

$$v(\beta)\,\underbrace{\frac{u'(\beta)}{u'(\alpha)}}_{<\,0} > v(\alpha)$$

$$\frac{v(\alpha)}{v(\beta)} < 0$$

q.e.d.

EJEMPLO : Si $q_1(t) = k^2 \geq 0$, la solución $u(t) = \cos(kt)$ de

$$y'' + k^2\,y = 0$$

tiene infinitos ceros. De esto, cualquiera sea $q_2(t)$ tal que $q_2(t) \geq k^2$, $\forall$ t, las soluciones reales de $y'' + q_2\,y = 0$ tienen infinitos ceros.

PROBLEMAS.

1. Si u tiene n ceros, v tiene n-1 ceros.

2. Con las hipótesis del Teorema de comparación de Sturm, si $q_1(t) \leq 0$, $\forall$ t, entonces toda solución real de $y'' + q_1\,y = 0$ tiene a lo sumo un cero.

UNIDAD VI : TRANSFORMADA DE LAPLACE

Una técnica descubierta hace siglos para resolver ecuaciones diferenciales es transformar la ecuación en otra, que a veces resulta mucho más fácil de resolver. Por supuesto, esto depende mucho de la habilidad de quien resuelve y su inventiva para las tranformaciones. Como ejemplo estudiaremos la transformada de Laplace.

Sea $V = \{ f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ continuas (o continuas a trozos y acotadas con a lo sumo un número finito de discontinuidades) tales que

$$\int_0^\infty |f(t)| \exp(-p_o t)\, dt < \infty$$

para algún $p_o > 0 \}$.

EJEMPLO : $x^k \in V$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$

<u>Dem:</u>

$$\exp(p_o t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p_o t)^n}{n!} \geq p_o t + \frac{(p_o t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(p_o t)^{k+2}}{(k+2)!}$$

$$\geq \frac{p_o^{k+2}\, t^{k+2}}{(k+2)!} \quad , \quad \forall\, t \geq 0 .$$

Entonces

$$\exp(-p_o t) \leq \frac{(k+2)!}{p_o^{k+1}} \; \frac{1}{t^{k+2}} \quad , \quad \forall\, t > 0 \quad (p_o > 0)$$

$$t^k \exp(-p_o t) \leq \frac{(k+2)!}{p_o^{k+2}} \; \frac{1}{t^2} \quad , \quad \forall\, t \geq 0$$

Ahora,

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1 \Rightarrow \int_1^\infty t^k \exp(-p_o t)\, dt < \infty .$$

Por otro lado, $t^k \exp(-p_o t)$ es continua en $[0,1]$, entonces existe $\int_0^1 t^k \exp(-p_o t)\, dt$. Así ,

$$\int_0^\infty t^k \exp(-p_o t)\, dt < \infty .$$

EJEMPLO : $\exp(\alpha t) \in V$, con $\alpha \in \mathbb{C}$ fijo.

<u>Dem:</u> $\alpha = a + i\, b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

$$| \exp(\alpha t) | = \exp(at) \Rightarrow | \exp(\alpha t) | \exp(-p_o t) = \exp((a-p_o)t)$$

Si $p_o > |a| \geq 0$, entonces $a - p_o < 0$, así

$$\exp(-(p_o - a)t) = \exp((a-p_o)t) \leq \frac{2}{p_o^2} \frac{1}{t^2} , \quad \forall\ t > 0 .$$

Entonces

$$\int_1^{\infty} \exp((a-p_o)t)\ dt \leq \frac{2}{p_o^2} \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\ dt = \frac{2}{p_o^2} < \infty .$$

Como $\exp((a-p_o)t)$ es continua en $[0,1]$, resulta que

$$\int_0^1 \exp((a-p_o)t)\ dt < \infty$$

Así ,

$$\int_0^{\infty} | \exp(\alpha t) | \exp(-p_o t)\ dt = \int_0^{\infty} \exp((a-p_o)t)\ dt < \infty .$$

EJEMPLO : $x^k \exp(\alpha x) \in V$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

<u>Dem:</u> $| x^k \exp(\alpha x) | = x^k \exp(ax)$, si $x > 0$, $\alpha = a + i\, b$

$$| x^k \exp(\alpha x) | \exp(-p_o x) = x^k \exp((a-p_o)x)$$

Si $p_o > |a| \geq 0$, entonces $a - p_o < 0$, así

$$\exp((a-p_o)x) = \exp(-(p_o-a)x) = \leq \frac{(k+2)!}{(p_o-a)^{k+2}} \frac{1}{x^{k+2}} , \quad \forall\ x > 0$$

$$x^k \exp((a-p_o)x) \leq \frac{(k+2)!}{(p_o-a)^{k+2}} \frac{1}{x^2} , \quad \forall\ x > 0.$$

Entonces

$$\int_1^{\infty} x^k \exp((a-p_o)x)\ dx < \infty .$$

Además, $x^k \exp((a-p_o)x)$ es continua en $[0,1]$, y así

$$\int_0^1 x^k \exp((a-p_o)x)\ dx < \infty .$$

Luego,

$$\int_0^{\infty} | x^k \exp(\alpha x) | \exp(-p_o x)\ dx = \int_0^{\infty} x^k \exp((a-p_o)x)\ dx < \infty$$

De esto se desprende que las soluciones de las ecuaciones lineales homogéneas de orden n (con coeficientes constantes) están en V (por ser combinación lineal de funciones de la forma $t^k \exp(\alpha t)$).

Por la fórmula de Heavside, las soluciones de la ecuación no homogénea lineal de orden n

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)} = b(x)$$

también viven en V para b polinomio, exponencial, o producto de polinomios por exponenciales.

PROPOSICION : Si $f \in V$, es decir, $\int_0^\infty |f(t)| \exp(-p_0 t)\, dt < \infty$ para algún $p_0 > 0$, entonces

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-pt)\, dt < \infty \quad , \quad \forall\ p \geq p_0 .$$

[O si $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(p) \geq p_0$] . De esto,

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \exp(-pt)\, dt$$

es una función de p bien definida para $p \in [\, p_0, \infty)$.

Dem:

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-pt)\, dt = \int_0^\infty f(t) \exp((p_0 - p)t) \exp(-p_0 t)\, dt$$

$p \geq p_0 > 0$, $t \geq 0 \Rightarrow \exp((p_0 - p)t) \leq 1$, $\forall\ t \geq 0$, $\forall\ p \geq p_0$.

Luego,

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-pt)\, dt \leq \int_0^\infty |\ f(t)\ | \exp(-p_0 t)\, dt < \infty ,$$

$\forall\ p \geq p_0$.

q.e.d.

Si $f \in V$, transformada de Laplace de f es la función

$$\mathscr{L}(f)(p) = \int_0^\infty f(t) \exp(-pt)\, dt$$

definida para $p \geq p_o > 0$.

Hay libros con tablas de transformadas de Laplace y hoy en día hay programas de computación que operan simbólicamente y que calculan la transformada de Laplace.

PROPOSICION : 1) $\mathscr{L}$ es lineal, es decir

$$\mathscr{L}(f+ag) = \mathscr{L}(f) + a\,\mathscr{L}(g) \quad , \quad \forall\, f, g \in V\,,\ \forall\, a \in \mathbb{C}\,.$$

2) $\mathscr{L}(\exp(at)) = (p - a)^{-1}$, $p > \mathrm{Re}(a)$.

3) $\mathscr{L}(\cos(at)) = \dfrac{p}{p^2 + a^2}$.

4) $\mathscr{L}(\mathrm{sen}(at)) = \dfrac{a}{p^2 + a^2}$.

5) Sea $b > 0$, $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ 1 & \text{si } t \geq b \end{cases}$, entonces

$$\mathscr{L}(y) = \frac{\exp(-pb)}{p}\,.$$

TEOREMA : Si $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$, $\forall\, f \in V$, entonces

$$\lim_{p\to+\infty} F(p) = 0\,.$$

Dem:

$$|\,F(p)\,| = |\,\mathscr{L}(f)(p)\,| \leq \int_0^{\infty} |\,f(t)\,| \exp(-pt)\,dt$$

Cuando $p \to +\infty$, $\exp(-pt) \to 0$, $\forall\, t > 0$ (salvo en $t = 0$). Así

$$|\,f(t)\,| \exp(-pt) \leq |\,f(t)\,| \exp(-p_o t) \in L^1(0,\infty)\,.$$

Luego, $|\,f(t)\,| \exp(-pt) \to 0$, para casi todo t, y está acotado por la función $|\,f(t)\,| \exp(-p_o t)$. Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{\infty} |\,f(t)\,| \exp(-pt)\,dt = \int_0^{\infty} \lim_{p\to+\infty} |\,f(t)\,| \exp(-pt)\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} 0\,dt = 0\,.$$

Así , $\lim_{p\to+\infty} F(p) = 0$.

l.q.d.

COROLARIO : p^n , e^p no son transformadas de Laplace.

PROPOSICION : $\mathcal{L} : V \to \{$ espacio de las funciones $\}$ es una función inyectiva.

Dem: Como $\mathcal{L}$ es lineal, basta ver que $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \{ 0 \}$.

Sea $f \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L}) \Rightarrow \mathcal{L}(f) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(f)(p) = 0 \ , \ \forall\ p \geq p_o \Rightarrow$

$$\int_o^\infty f(t)\ \exp(-pt)\ dt = 0 \ , \ \forall\ p \geq p_o \ .$$

Como $p \geq p_o$, existe $k \in \mathbb{N}_o$ tal que $p = p_o + k$.

En particular,

$$\int_o^\infty f(t)\ \exp(-kt)\ \exp(-p_o t)\ dt = 0 \ .$$

Sea $s = \exp(-t) \Rightarrow -\ln s = t \Rightarrow ds = -s\, dt$. Luego,

$$\int_o^1 s^k\ s^{p_o}\ f(-\ln s)\ \frac{ds}{s} = 0$$

$$\int_o^1 s^{k-1}\ \underbrace{s^{p_o}\ f(-\ln s)}_{h(s)}\ ds = 0 \ .$$

$h(s) \in C[0,1]$; $(h, s^n) = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}_o$ (Consecuencia del Teorema de Aproximación de Weierstrass). Como resulta h ortogonal a todo polinomio en $[0,1]$, debe ser $h \equiv 0$. Así

$$s^{p_o}\ f(-\ln s) \equiv 0 \ , \ \forall\ s \Rightarrow f(-\ln s) \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

Por tanto, $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \{ 0 \}$, y resulta $\mathcal{L}$ función inyectiva,

q.e.d.

CONVOLUCION DE FUNCIONES EN V .

DEFINICION : $* : V \times V \to V$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\ g(t-s)\ ds \ .$$

Como $f, g \in V$, entonces están definidas en $(0,\infty)$, pero se pueden extender a $(-\infty,\infty)$, anulándose en $(-\infty,0]$. Entonces

$$f(s) = 0 \quad \text{si} \quad s \leq 0 \; ;$$
$$g(t-s) \quad \text{si} \quad t-s \leq 0 \; .$$

Entonces, $s \notin (0,t) \Rightarrow f(s)\, g(t-s) = 0 \Rightarrow$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s) \; g(t-s)\, ds \; .$$

PROPOSICION : $\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\, \mathcal{L}(g)(p)$, $\forall\; p > p_0$

Dem:

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \int_0^\infty (f * g)(t) \exp(-pt)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(s)\, g(t-s)\, ds \exp(-pt)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(s)\, g(t-s) \exp(-pt)\, dt\, ds$$

En la integral interna hacemos $t - s = x$, entonces

$$= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(s)\, g(x) \exp(-p(x+s))\, dx\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \exp(-ps)\, f(s) \int_0^\infty g(x) \exp(-px)\, dx\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \exp(-ps)\, f(s)\, \mathcal{L}(g)(p)\, ds$$

$$= \mathcal{L}(f)(p)\, \mathcal{L}(g)(p)$$

q.e.d.

PROPOSICION : $\mathcal{L}(f')(p) = p\, \mathcal{L}(f)(p) - f(0)$

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\, \mathcal{L}(f)(p) - p\, \mathcal{L}(0)(p) - f'(0)$$

....

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(p) = p^k\, \mathcal{L}(f)(p) - p^{k-1} f(0) - \dots$$
$$- p\, f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0) \; .$$

APLICACION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

Se busca $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ tal que $\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)} = b(t)$, dados a_k reales y $b \in V$. Además se pide que $f^{(k)}(0) = c_k$, k [illegible] dados.

Sabemos que f existe (lo cual es cierto p.p.) y aplica Laplace.

$$\mathcal{L}(b)(p) = \sum_k a_k \mathcal{L}(f^{(k)})(p)$$

$$= \sum_k a_k \left(p^k \mathcal{L}(f)(p) - p^{k-1} f(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0) \right)$$

Sea $h = \sum_k a_k t^k$.

$$\mathcal{L}(b)(p) = h(p) \mathcal{L}(f)(p) + Q(p) ,$$

donde Q es un polinomio en p de grado $\leq n-1$, cuyos coeficientes los calculamos a partir de los datos $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$. Entonces

$$\frac{1}{h(p)} \mathcal{L}(b)(p) - \frac{Q(p)}{h(p)} = \mathcal{L}(f)(p) .$$

$1/h$, Q/h son funciones racionales con grado del numerador , menor que el grado del denominador. Por lo tanto sabemos que $1/h = \mathcal{L}(f_1)$ y $Q/h = \mathcal{L}(f_2)$ con $f_i \in V$.

$$\mathcal{L}(f_1) \mathcal{L}(b) - \mathcal{L}(f_2) = \mathcal{L}(f)$$

Como $\mathcal{L}(f_1) \mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(f_1 * b)$, resulta

$$\mathcal{L}(f_1 * b - f_2) = \mathcal{L}(f)$$

Entonces

$$f = f_1 * b - f_2 .$$

ANEXO I.

1. INTRODUCCION.

Frecuentemente se desea conocer no la solución exacta de una ecuación diferencial para condiciones iniciales dadas, sino una solución aproximada, sujeta a cierta tolerancia, por ejemplo, que difiera de la solución exacta a lo más en 10^{-4} o 10^{-10}. En la actualidad, gracias a los computadores, esto lleva sólo segundos. Como resultado de esto, la teoría de la **integración numérica** de las ecuaciones diferenciales ordinarias se torna de gran importancia. El presente apéndice tiene como objetivo introducir esta teoría.

Nos interesará resolver ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\mathbf{x}'(t) = X(\mathbf{x},t) \quad , \quad a \le t \le a + h \qquad (1)$$

con un valor inicial dado $\mathbf{x}(a)$.

La idea básica de la integración numérica es que uno puede con simple *aritmética* calcular soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales. Analizaremos en principio métodos simples que fueron conocidos por Euler. Pero su riguroso *análisis del error* es más reciente. Cada método provee una sucesión de *soluciones aproximadas* $\mathbf{x}_\pi(t)$ ($\pi = \pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$) de (1), asociadas a *particiones* $\pi = \pi_k$ del intervalo de integración, que converge más o menos rápido a la solución exacta.

En la Sección describiremos otros métodos más modernos y eficientes de integración numérica. En el Apéndice II encontrará programas de computación cortos, escritos en lenguaje BASIC, que implementan los métodos aquí detallados.

Tablas de Función Aproximada : Los métodos más eficientes para hallar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales calculan en cada caso una *tabla función* aproximada, dando valores aproximados de la solución asociados a una *partición* π del intervalo [a, a + h] de interés a una sucesión de puntos t_o < t_1 < t_2 < ... . Estos valores tabulados son calculados recursivamente; entre valores sucesivos, la solución aproximada es definida por una *fórmula de interpolación* conveniente. Tales soluciones aproximadas pueden ser construídas como funciones que CASI satisfacen la ecuación diferencial dada, en el siguiente sentido

Definición : Una función $\mathbf{y}(t)$ es una *solución aproximada* de la ecuación diferencial (1) con *error* de a lo más η, cuando

$$| \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) | < \eta \ , \ \forall \ t \in [\ a, \ a + h \ ].$$

Su *desviación* es a lo más ε cuando $\mathbf{y}(t)$ es continua y satisface la desigualdad

$$| \mathbf{y}'(t) - X (\mathbf{y}(t), t) | \leq \varepsilon \qquad (2)$$

excepto para un número finito de *puntos* t del intervalo [a, a + h].

Nótese que la definición requiere que la función y sea diferenciable, excepto al menos en un conjunto de puntos finito, posiblemente vacío.

2. POLIGONOS DE CAUCHY.

Veremos una forma sencilla de construír una tabla de función aproximada para la solución de la ecuación diferencial (1), que satisfaga la condición inicial $\mathbf{x}(a) = \mathbf{c}$.

Primero dividamos el intervalo [a, b] en m partes a través de la partición

$$\pi \ : \ a = t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b = a + h \qquad (3)$$

Para cualquier valor inicial $\mathbf{x}(a) = \mathbf{c}$, el elemento $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_\pi(t_k)$ en la tabla de la función aproximada para $\mathbf{x}(t)$ está definido por

$\mathbf{x}_o = \mathbf{c}$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + X(x_{k-1}, t_{k-1})\,(t_k - t_{k-1}) \quad ; \quad k = 1, \ldots, m \qquad (4)$$

A partir de la tabla de la función aproximada definida, uno puede también construír una *solución aproximada* por interpolación lineal. Esta solución aproximada está dada por la fórmula

$$\mathbf{x}_\pi(t) = \mathbf{x}_{k-1} + X(x_{k-1}, t_{k-1})\,(t - t_{k-1}) \quad \text{en} \quad [t_{k-1}, t_k]. \qquad (4')$$

Claramente, el grafo de la solución aproximada consta de m segmentos de recta; este es un polígono en el $(t,\mathbf{x})$-espacio $(n+1)$-dimensional. La solución definida por (4) y (4') para cada partición π y cada valor inicial $\mathbf{c}$ es llamada la aproximación *poligonal de Cauchy* a la solución.

Para quienes les interesa la cota de error producida por este método, enunciamos sin demostración el siguiente :

TEOREMA : Sea $\mathbf{x}(t)$ una solución exacta e $\mathbf{y}(t)$ una solución aproximada, con desviación ε, de la ecuación diferencial $\mathbf{x}'(t) = X(x,t)$. Sea X satisfaciendo la condición de lipschitz. Entonces, para $t \geq a$, tenemos

$$|\,\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\,| \leq |\,\mathbf{x}(a) - \mathbf{y}(a)\,| \exp(L(t-a)) + \frac{\varepsilon}{L}(\exp(L(t-a))-1) \qquad (5)$$

siendo L la constante de lipschitz.

Considerando h la longitud de la malla de la partición del intervalo de integración, puede probarse que la aproximación a través de la poligonal de Cauchy es del orden de o(h), esto es, el error de la aproximación está acotado por Nh, donde N es una constante independiente de h.

3. CUADRATURA DE PUNTO MEDIO.

La fórmula que sigue es de mayor orden de exactitud que la fórmula del polígono de Cauchy, y es la fórmula de *cuadratura de punto medio*:

$$\int_a^b F(x)\ dx \approx M_\pi[F] = \sum_{i=1}^{n} F(m_i)\ \Delta x_i \qquad (\ 6\ )$$

donde $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Dada la partición π del intervalo de integración [*a*, *b*] por puntos de subdivisión $a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, la aproximación de punto medio $M_\pi[F]$ es fácilmente calculable. Su nombre proviene del hecho que m_i es el punto medio del i-ésimo intervalo de subdivisión. Una ***cota del error*** surge del siguiente :

TEOREMA : Si $F \in \mathscr{C}^2$, entonces

$$\left| \int_a^b F(x)\ dx - \sum_{i=1}^{n} F(m_i)\ \Delta x_i \right| \leq \| F'' \|\ |\ \pi\ |^2\ \frac{b - a}{24} \qquad (\ 7\ )$$

donde se tome la norma del mínimo, y $|\pi| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\ |\Delta x_i|\ \}$.

Este teorema afirma que la fórmula (6) de cuadratura de punto medio tiene orden de exactitud $o(h^2)$, un orden mayor que el método anterior.

4. CUADRATURA TRAPEZOIDAL.

La fórmula de cuadratura trapezoidal es

$$\int_a^b F(x)\ dx \approx T_\pi[F] = \sum_{i=1}^{n} [\ F(x_{i-1}) + F(x_i)\ ]\ \Delta x_i/2 \qquad (\ 8\ )$$

Esta fórmula también tiene exactitud del orden $o(h^2)$, que resulta del siguiente :

TEOREMA : La cota de error para la cuadratura trapezoidal está dada por la desigualdad

$$\left| \int_a^b F(x)\ dx - T_\pi[F] \right| \leq \| F'' \| \ | \pi |^2 \frac{b-a}{12} \qquad (9)$$

5. INTEGRACION TRAPEZOIDAL.

El resto del Apéndice será dedicado a la presentación de tres métodos de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y sistemas que, como las cuadraturas de punto medio y trapezoidal, tienen exactitud $o(h^2)$. El primero de ellos es el de *integración trapezoidal*. Para un sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = X(x,t)$$

de ecuaciones diferenciales de primer orden está definido implícitamente por la fórmula recursiva

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k-1} + [\ X(\mathbf{y}_{k-1}, t_{k-1}) + X(\mathbf{y}_k, t_k)\ ]\ \Delta t_k/2 \qquad (10)$$

donde $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Para un valor inicial dado $\mathbf{y}_o = \mathbf{c}$ y una partición π, la fórmula (10) define una sucesión de valores $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_\pi(t_k)$, esto es, una tabla ***función*** describiendi aproximadamente la solución de la ecuación diferencial $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = X(x,t)$ que satisface el valor inicial $\mathbf{x}(a) = \mathbf{c}$.

6. EL METODO DE EULER MEJORADO.

El método trapezoidal es muy conveniente para hallar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales lineales, porque uno puede resolverlo algebraicamente para $\mathbf{y}_k$. Pero no es útil cuando aparecen ecuaciones diferenciales no lineales, dada la dificultad de resolverla para $\mathbf{y}_k$. En general, la fórmula (10) no define los vectores $\mathbf{y}_k$ recursivamente sino sólo implícitamente. Para determinar cada $\mathbf{y}_k$ tenemos que resolver la ecuación (10), donde $\mathbf{y}_k$ es la incógnita, e $\mathbf{y}_{k-1}$ fue obtenida previamente.

Para Δt_k pequeño, podemos hacer esto por ***iteración*** : comenzamos por un valor de prueba $\mathbf{y}_k$ [digamos $\mathbf{y}_{k-1} + X(\mathbf{y}_{k-1}, t_{k-1})\ \Delta t_k$], sustituímos este valor de prueba $\mathbf{y}_k^{o}$ en el miembro derecho de (10) para obtener una mejor aproximación $\mathbf{y}_k^{1}$, y entonces repetimos el proceso

$$\mathbf{y}_k^{r+1} = \mathbf{y}_{k-1} + [\ X(\mathbf{y}_{k-1}, t_{k-1}) + X(\mathbf{y}_k^{r}, t_k)\ ]\ \Delta t_k/2 \qquad (\ 11\ )$$

en (10) hasta que supere el error tolerado.

Este método de Euler mejorado tipifica la clase de las llamados *métodos predictor-corrector*, cuya filosofía es la siguiente :

Primero, por extrapolación o de otra forma, uno prueba hacer el método con un $y_k^{(0)}$ razonable, obteniendo un y_k; en nuestro caso, este $y_k^{(0)}$ es provisto por el método de la poligonal de Cauchy aplicado a y_{k-1} :

$$y_k^{(0)} = y_{k-1} + X(y_{k-1}, t_{k-1})\ \Delta t_k \qquad (\ 12\ )$$

Este $y_k^{(0)}$ es llamado el ***predictor***.

Entonces se considera la ecuación implícita resuelta, por ejemplo la ecuación (10), como un ***corrector*** :

$$y_k^{(r+1)} = y_{k-1} + [\ X(y_{k-1}, t_{k-1}) + X(y_k^{(r)}, t_k)\ \Delta t_k/2 \qquad (\ 13\ )$$

6. EL METODO DE EULER MODIFICADO.

El método de Euler mejorado tiene la ventaja sobre el método trapezoidal de ser explícito. Uno puede usar la siguiente adaptación de la fórmula de cuadratura de punto medio

$$w_k = w_{k-1} + h\ X(w_{k-1} + h\ x_{k-1}/2, t_{k-1} + h/2)\ ;\ h = \Delta t_k \qquad (\ 14\ )$$

Este *punto medio* o *Euler modofocado* tiene la exactitud de los métodos trapezoidal y Euler mejorado en el caso especial dx/dt = F(t) .

7. EL METODO DE RUNGE-KUTTA.

Consiste en extender las aproximaciones del método de Euler mejorado de modo de obtener un orden de exactitud mayor.

Consideremos el sistema de primer orden

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = X(x,t) \ ; \ a \le t \le b \qquad (15)$$

con puntos de malla $a = t_o < t_1 < t_2 < \ldots$ Sea $y_o = x(a)$ el valor inicial. La tabla de función aproximada de los valores y_i correspondientes a los puntos t_i es definida por la ecuación diferencial

$$y_{i+1} = y_i + h\ (k_1 + 2\ k_2 + 2\ k_3 + k_4\ )/6$$

$$k_1 = X(y_i, t_i)$$

$$k_2 = X(\ y_i + h\ k_1/2,\ t_i + h/2\ )$$

$$k_3 = X(\ y_i + h\ k_2/2,\ t_i + h/2\ )$$

$$k_4 = X(\ y_i + h\ k_3,\ t_i + h\ )$$

donde $h = h_i$ es la longitud de malla, que puede variar con *i*.

Puede probarse que este método tiene un error de sólo $o(h^5)$ por paso.

ANEXO II.
INTEGRACION NUMERICA EN BASIC.

1. RUDIMENTOS DE BASIC.

El lenguaje BASIC de programación es extremadamente fácil de aprender, y los programas escritos en este lenguaje muestran la esencia de los algoritmos en forma muy sencilla. En esta sección presentamos el BASIC suficiente como para que aquellos faltos de experiencia en programación entiendan programas cortos que se usen algoritmos para resolver problemas de valor inicial descritos en el Capítulo anterior. Los programas mismos serán el objeto de este anexo, no se encontrarán muchas dificultades en adaptar estos programas a otros problemas.

Tomemos como primer ejemplo la ecuación diferencial $y' = y$ con condición inicial $y(0) = 1$, cuyas soluciones exactas son $y = e^x$. Veremos cómo el **método del polígono de Cauchy** puede ser usado para construír esta función directamente a partir de su definición.

En particular, para cualquier longitud de malla constante h, este método construye a partir de la ecuación diferencial dada y el valor inicial $y_o = 1$ una tabla de función aproximante para e^x por la relación recursiva

$$y_{k+1} = y_k + h\,F(x_k, y_k) = (1 + h)\,y_k \qquad (1)$$

Para obtener la salida (por impresión) de una tabla que liste $y_1, \ldots, y_r$ (para un r dado) con los valores aproximados $x_1, \ldots, x_r$ el siguiente programa es suficiente.

```
NEW EXP1
10 INPUT H,R
```

```
25 LET X=0
30 LET Y=1
35 FOR K=1 TO R
45 LET X=X+H
50 LET Y=Y+H*Y
55 PRINT X,Y
60 NEXT K
65 END
```

NOTA : La línea 10 de EXP1 establece la longitud de malla h y el número r de elementos a ser impresos. Las líneas 25-30 establecen los valores iniciales $x_o = 0$, $y_o = 1$. Las líneas 35-60 constituyen un *loop* (lazo) ejecutado r veces, en el cual son calculados x_k e y_k a partir de x_{k-1} e y_{k-1} usando la fórmula (1).

Cuando presione la tecla RETURN de su terminal después de tipear el programa, el computador responderá READY. Si entonces tipea RUN (en la próxima línea), éste responderá " ? ", *si usted ha tipeado correctamente el programa !*. El computador está respondiendo al comando INPUT de la línea 10, preguntando los valores de h y de r. Usted debe tipear a la derecha del ? los valores de h y r a partir de los cuales será construída la tabla por el método del polígono de Cauchy. Por ejemplo, su nueva línea aparecerá como sigue :

? 0.1, 10

El computador imprimirá entonces por pantalla la tabla de

$$y_k \sim \exp(k/10) \text{ , para } k = 1, \ldots, 10.$$

Esto será incorrecto porque el método del polígono de Cauchy es inexacto excepto para valores de h muy pequeños. Para obtener mejores resultados corra nuevamente el programa para h = .05, r = 20 o bien h = .02, r = 50.

2. METODO DEL POLIGONO DE CAUCHY.

A pesar de que en la práctica se utilizan métodos más exactos, el método del polígono de Cauchy es instructivo dad su simplicidad. Por consiguiente, presentaremos a continuación otro programa, EXPTABLA (disttinto de EXP1) que es fácil modificar para dar tablas de aproximación de la solución de $y' = F(x,y)$ para *cualquier* $F(x,y)$ que satisfaga una condición de Lipschitz, y *cualesquiera* valores iniciales $x = a$, $y(a) = c$.

```
EXPTABLA
10 PRINT " METODO DEL POLIGONO DE CAUCHY "
15 PRINT " XK ", " YK ", " ERROR "
20 READ A,C,H,R                          ? A / . 156@
25 DEF FNF(X,Y)=Y
30 LET X=A
35 Y=C
40 FOR K=1 TO R
45 LET D=FNF(X,Y)
50 X=X+H
55 Y=Y+H*D
60 PRINT X,Y,EXP(X)-Y
65 NEXT K
70 DATA 0,1,.1,10
75 END
```

NOTA : La línea 25 establece simplemente, en BASIC, que desea asignarle a y el valor de la función $F(x,y)$ en cualquier par x,y dado. Si hubiese deseado integrar la ecuación diferencial

$$y' = \operatorname{arctg}(x\,y)$$

la línea 15 se reemplazará por

```
15 DEF FNF(X,Y)=ATN(X*Y)
```

por razones que se detallarán luego. Las líneas 50-55 calculan x_k

e y_k.

Puesto que la solución exacta de la ecuación diferencial y' = y para el valor inicial y(0) = 1 es exp(x), y la función exp(x) puede ser calculada para cualquier x en BASIC escribiendo EXP(X), podemos estimar los **errores** en nuestra tabla de aproximación de la función, pidiende la salida de la diferencia exp(x) - y al final de la tabla, como en la línea 60 de EXPTABLA.

FUNCIONES DE BASIC : Las versiones estándar de BASIC son capaces de proveer los valores de funciones que son comúnmente requeridas. Así, cualquier *monomio* , *b* x^n puede ser obtenido usando B*(X^N), donde * en BASIC (y Fortran) es el símbolo de multiplicación, y X^N representa x^n. Con esto, la función *polinómica*

$$p(x) = x^5 - 7\,x^3 + 2\,x$$

puede ser obtenida escribiendo

```
15 DEF FNP(X) = X^5-7*(X^3)+2*X
```

La función racional $r(x)=p(x)/(x^2+7)$ puede ser obtenida como

```
16 DEF FNR(X) = FNFP(X)/(X*X+7)
```

Finalmente, la función exp(r(x)) puede ser obtenida mediante

```
17 DEF FNE(X) = EXP(FNR(X))
```

Los ejemplos citados muestran cómo construír en BASIC cualquier función que es combinación de funciones racionales, raíces (como $x^{1/3}$ = X^(.3333333)), y funciones exponenciales (reales). Otras funciones trascendentes son también válidas en BASIC; las más notables son

SIN(X), COS(X), ATN(X), LOG(X), SQR(X).

Aquí, las funciones senx, cosx, arctgx = ATN(X) están en *radianes*, y LOG(X) =ln(x) es la función logaritmo natural. La función SQR(X) = $x^{1/2}$ = X^(.5).

Refinamiento de la malla. Aún con el método del polígono de Cauchy uno puede lograr legítimamente aproximaciones más cercanas a la solución exacta e^x de $y' = y$ para el valor inicial $y(0) = 1$ subdividiendo la malla en s partes iguales. Esto puede hacerse insertando las siguientes nuevas líneas en EXPTABLA

```
22 H=H/2
42 FOR J=1 TO S
57 NEXT J
```

Esto agrega un *lazo interno* al programa EXPTABLA, en el cual para cada k calcula s-1 valores intermedios. Para especificar s y ver el efecto del refinamiento de la malla en la exactitud, se pueden reescribir las líneas 10 y 35 como sigue :

```
18 INPUT H,S
20 READ H,C,R
35 FOR K=1 TO S
75
```

3. PROGRAMAS DE CUADRATURA.

Es especialmente fácil escribir programas para construír tablas de aproximación de funciones definidas como *integrales indefinidas* de la forma $\int_a^x F(t)\,dt$. El siguiente programa en BASIC, llamado CUAD, construirá tablas para aproximar los valores de

$$\ln x = \int_1^x dt/t,$$

por las fórmulas del punto medio, trapecio y por la Regla de Simpson.

```
CUAD.
 5 DEF FNF(X) = 1/X
10 READ A,B
12 INPUT N
15 PRINT " X ", " PUNTO MEDIO ", " TRAPECIO ", " SIMPSON "
16 PRINT
18 LET H=(B-A)/N
20 FOR K=1 TO N
25 LET Q=A+(K*H)-(H/2)
```

```
30 P=A+(K*H)-H
35 R=A+(K*H)
40 M=M+H*FNF(Q)
45 T=T+H*(FNF(P)+FNF(R))/2
50 LET S=(2*M+T)/3
55 PRINT A+K*H,M,T,S
60 NEXT K
65 DATA 1,2
70 END
```

NOTA : Las especificaciones de a y h en las líneas 10 y 65 usan READ...DATA como otra alternativa en lugar de INPUT...? como se utilizó en EXP1 y EXPTABLA. En este formato, las cantidades a ser *leídas* son listadas en una línea (o más) rotulada con READ; esta *debe* ser seguida por una línea (o más) rotulada con DATA en la cual los valores numéricos son asignados como dato. La línea 5 especifica el integrando como F(x) = 1/x; a línea 65 establece a = 1, de donde $\int_a^x F(t)\,dt = \ln x$. Como nh = 1 por las líneas 18, 65, la integral final aproximada es $\int_1^2 dx/x = \ln 2$. Las líneas 25 y 40 implementan la fórmula de cuadratura del punto medio (para F(x) = 1/x).

Puede verificarse que el error acumulado al usar en el programa QUAD la fórmula del punto medio es realmente $o(h^2)$, al igual que para el trapecio. La regla de Simpson tiene exactitud $o(h^4)$. Esto puede verificarse a través de una salida numérica en CUAD.

GENERALIZACIONES : Cambiando la definición del integrando en la línea 5 y las instrucciones READ...DATA de las líneas 10 y 65-72, pueden obtenerse aproximaciones de cualesquiera otras integrales definidas, tales como la integral elíptica

$$F(k,\operatorname{arcsen}(x)) = \int_0^x d\xi/\sqrt{(1-\xi)^2(1-k^2\xi^2)}\,.$$

En este ejemplo, la línea 5 se escribirá

```
5 DEF FNF(X)=1/SQR((1-X*X)(1-.25*X*X))
```

para tratar el caso $k = 1/2$, y reemplazar las líneas 65-72 por las líneas

```
65 DATA 0,.1,9
70 DATA 0,.03125,31
```

La cuadratura gaussiana es más exacta pero más tediosa para programar. Así, para $n = 5$, los puntos de Gauss x_i y sus pesos asociados w_i son, respectivamente

0,.56888889;±0.5384693;.4786287;±.9061798,.2369269.

4. METODOS DE EULER MODIFICADO Y MEJORADO.

Los métodos de Euler modificado y mejorado son igualmente fáciles de programas en BASIC. Así, uno puede integrar numéricamente un sistema no lineal, aplicando el algoritmo de Euler mejorado como sigue :

```
EUMEJ
 5 READ A,C1,C2,H,R
10 DEF FNF(X,Y)=X*X+Y*Y
15 DEF FNG(X,Y)=1+X*X-Y*Y
20 LET T=A
25 X=C1
30 Y=C2
32 FOR K=1 TO R
35 P=X+H*FNF(X,Y)
40 Q=Y+H*FNG(X,Y)
45 X1=X+H*(FNF(X,Y)+FNF(P,Q))/2
50 Y=Y+H*(FNG(X,Y)+FNG(P,Q))/2
52 X=X1
55 T=T+H
60 PRINT T,X,Y
```

```
65 NEXT K
70 DATA 0,0,0,.1,20
75 END
```

Nótese que el error de redondeo puede ser reducido usando números representables en máquina (es decir, binarios exactos). Esto puede hacerse reemplazando .1,20 en la línea 70 por .125,16 o .0625,32.

Notemos finalmente que sólo se necesita modificar las líneas 10, 15 y 70 para lograr una tabla de aproximación de una función solución de *cualquier* sistema autónomo plano

$$x'(t) = f(x,y), \; y'(t) = g(x,y)$$

para cualquier valor inicial (x_o, y_o).

De la misma forma, el siguiente programa EMO2 implementa el algoritmo de Euler modificado para la ecuación diferencial $y' = y$.

```
EMO2
 5 READ A,C,H,R
10 DEF FNF(X,Y)=Y
15 LET X=A
20     Y=C
25 FOR I=1 TO 20
30 FOR J=1 TO R
35 LET X=X+(H/2)
38     D=FNF(X,Y)
40     Z=Y+(H*D)/2
42     D1=FNF(X,Z)
44     Y=Y+H*D1
46     X=X+(H/2)
47 REM DOS EVALUACIONES DE LA FUNCION POR PASO
48 NEXT J
50 PRINT " EXP " X " = " Y," EL ERROR ES " EXP(X)-Y
52 NEXT I
```

```
55 DATA 0,1,.005,10
60 END
```

Si bien el programa EMO2 contiene sólo 10 líneas, algunos comentarios sobre las líneas 35 a 50 son necesarios para explicar su construcción. Las líneas 35, 38 y 40 usan simplemente la aproximación (1) sobre el intervalo [x_k, $x_k + \theta$), donde $\theta = h/2$; este es el **punto medio** del segmento de la solución del polígono de Cauchy con valor inicial (x_k, y_k) y tamaño de paso h.

Para una exactitud $o(h^2)$, este es el *promedio* de la curva solución exacta en (x_k, y_k), extendido a $x_{k+1} = x_k + h$, sobre el intervalo [x_k, $x_k + h$]. De ahí calculamos, usando las líneas 42 y 44,

$$y_{k+1} = y_k + h\,F(\,x_k + \theta,\ y_k + \theta\,F(\,x_k,\ y_k\,)),\quad \theta = h/2 \qquad (2)$$

y entonces $x_{k+1} = (\,x_k + \theta\,) + \theta$ en la línea 46. Esto toma dos evaluaciones de la función por paso. Nuestra esperanza es, entonces, que el promedio $(\,y_{k+1} - y_k\,)\,/\,(\,x_{k+1} - x_k\,)$ sea exacto en $o(h^2)$. Esta esperanza puede ser confirmada experimentalmente, inspeccionando de salida numérica. Puede doblarse la longitud de malla reescribiendo la línea 55 como

```
55 DATA 0,1,.01,5.
```

5. RUNGE-KUTTA DE ORDEN-CUATRO.

Como una ilustración final de la sencillez con que pueden resolverse numéricamente problemas de valor inicial, presentamos un programa BASIC que implementa el algoritmo de Runge-Kutta de orden cuatro. Como está escrito, imprime una tabla de valores de aproximación de la función e^x [solución de $y' = y$ que satisface $f(0) = 1$]. Sin embargo, reescribiendo las líneas 15 y 75, cualquier otro problema de valor inicial razonable puede ser resuelto.

```
RK4
10 READ A,C,H,R
15 DEF FNF(X,Y)=Y
18 PRINT "X","Y"
20 LET X=A
25 Y=C
28 PRINT
30 FOR I=1 TO R
35 LET K1=FNF(X,Y)
40 K2=FNF(X+H/2,Y+H*K1/2)
45 K3=FNF(X+H/2,Y+H*K2/2)
50 K4=FNF(X+H,Y+H*K3)
55 Y=Y+H*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6
60 X=X+H
65 PRINT X,Y
70 NEXT I
75 DATA 0,1,.1,20
80 END
```