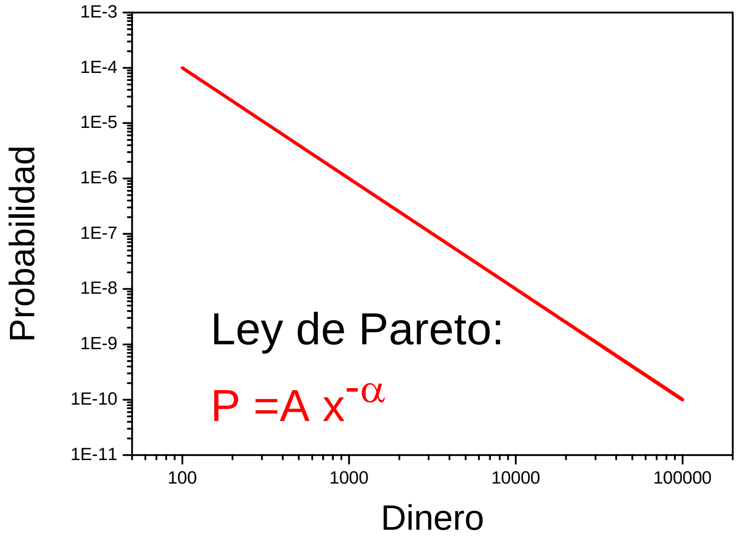
# La estructura de la distribución del ingreso y la desigualdad social

- Juan C. Ferrero

**Pareto (1897) encontró que en la Italia del siglo XIX la distribución del ingreso seguía una ley potencial.**

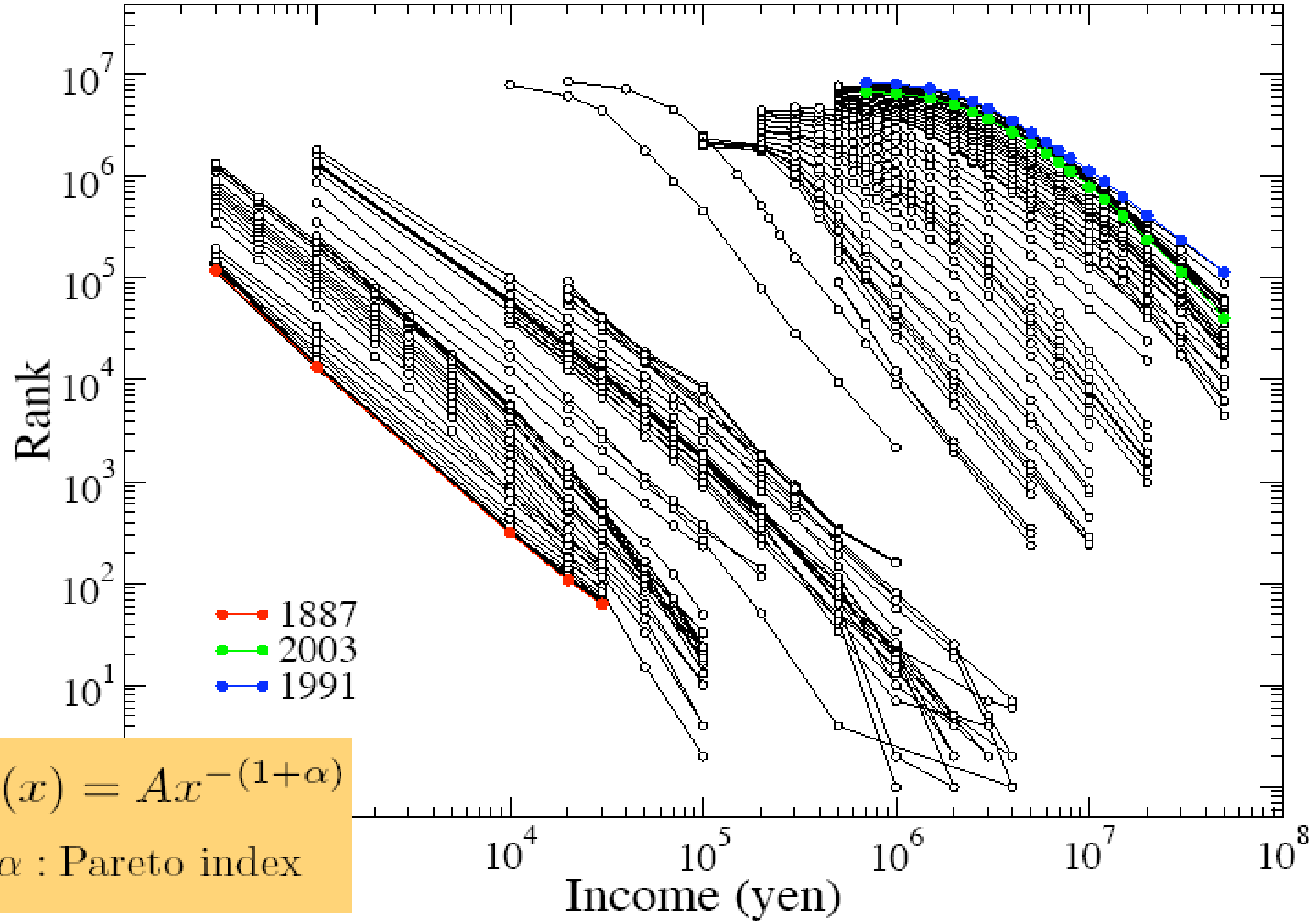



**Encontró también que el 80% de los bienes pertenecían al 20% de la población**

PB mundial, 1989

| Quintile of Population | Income |
|---|---|
| Richest 20% | 82.70% |
| Second 20% | 11.75% |
| Third 20% | 2.30% |
| Fourth 20% | 1.85% |
| Poorest 20% | 1.40% |

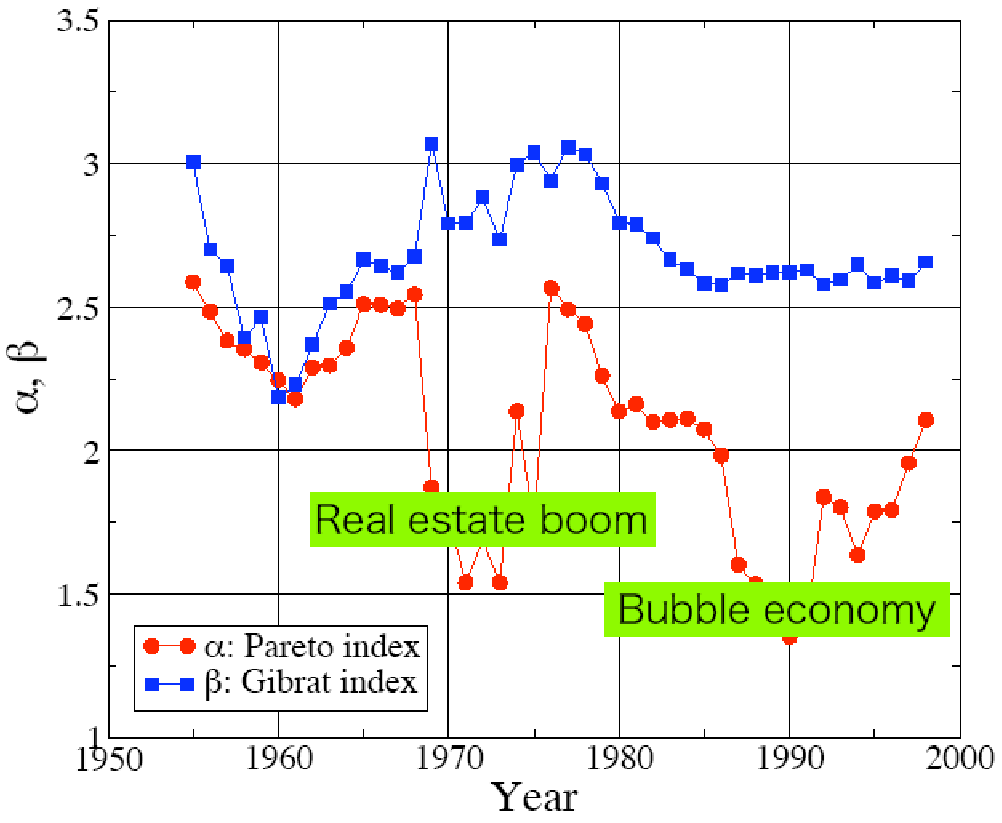
## Results of Sample Survey for Self-assessed Income Tax from 1887 to 2003

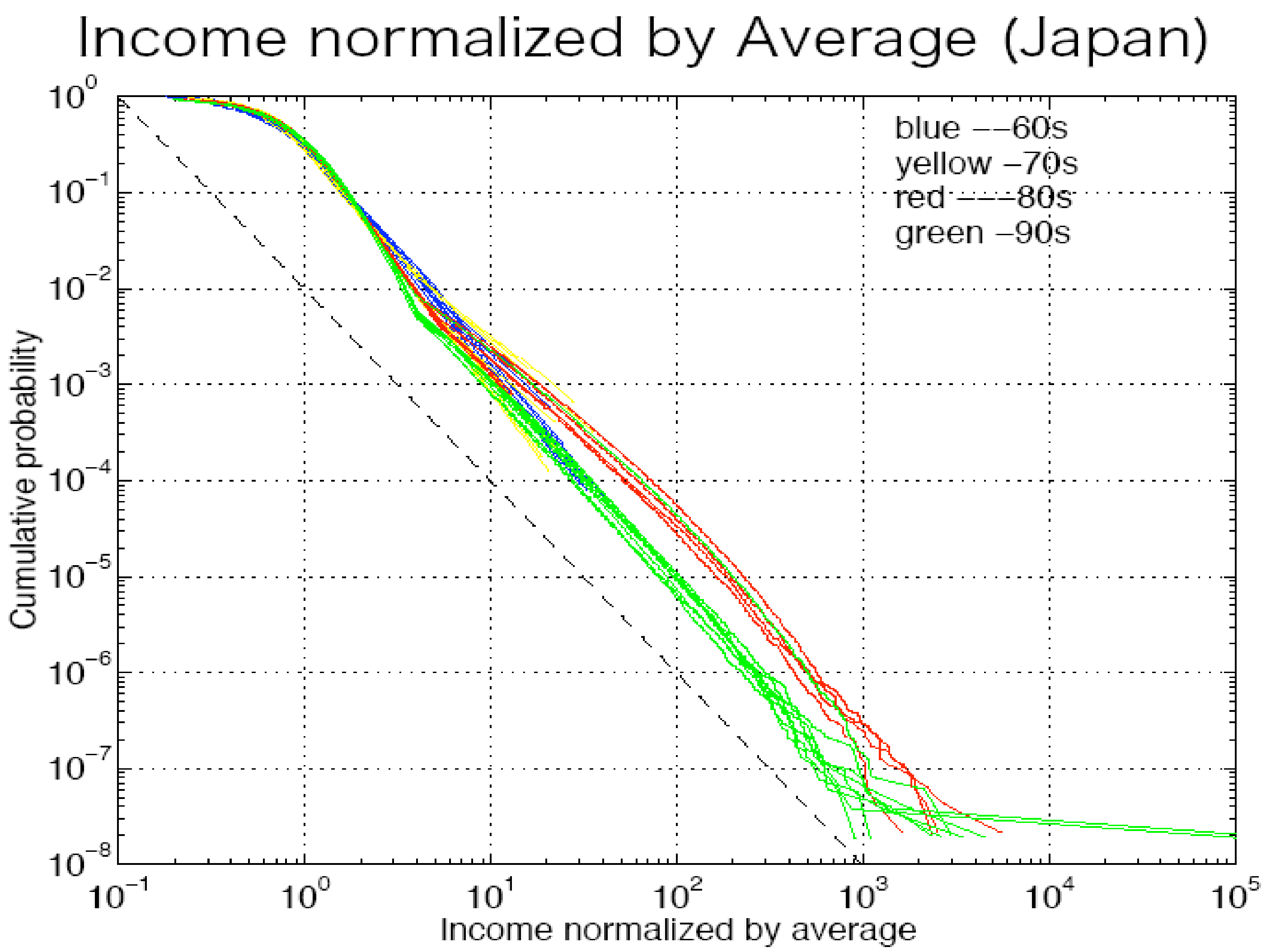



$$p(x) = Ax^{-(1+\alpha)}$$

$\alpha$ : Pareto index

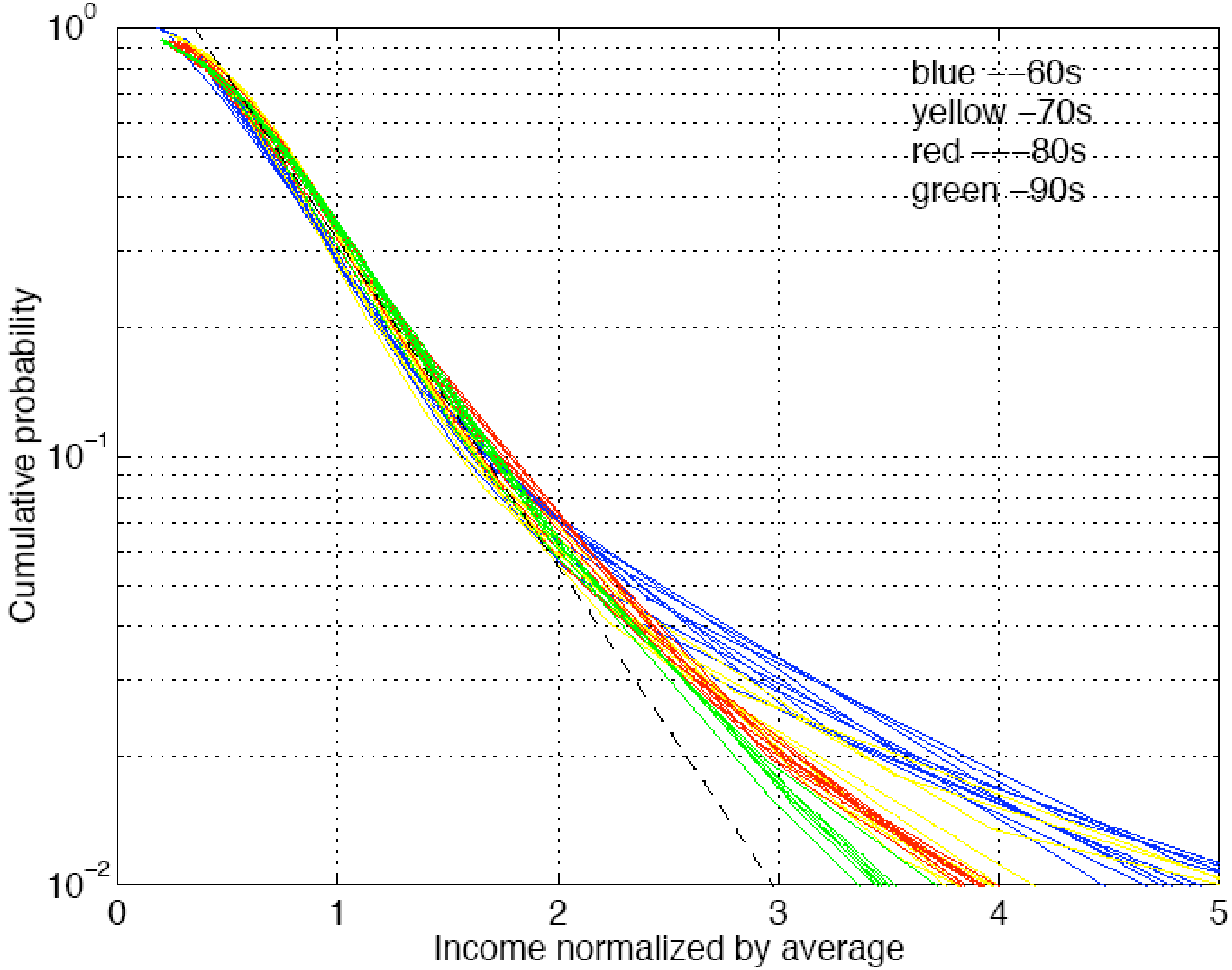
# Pareto index and Gibrat index



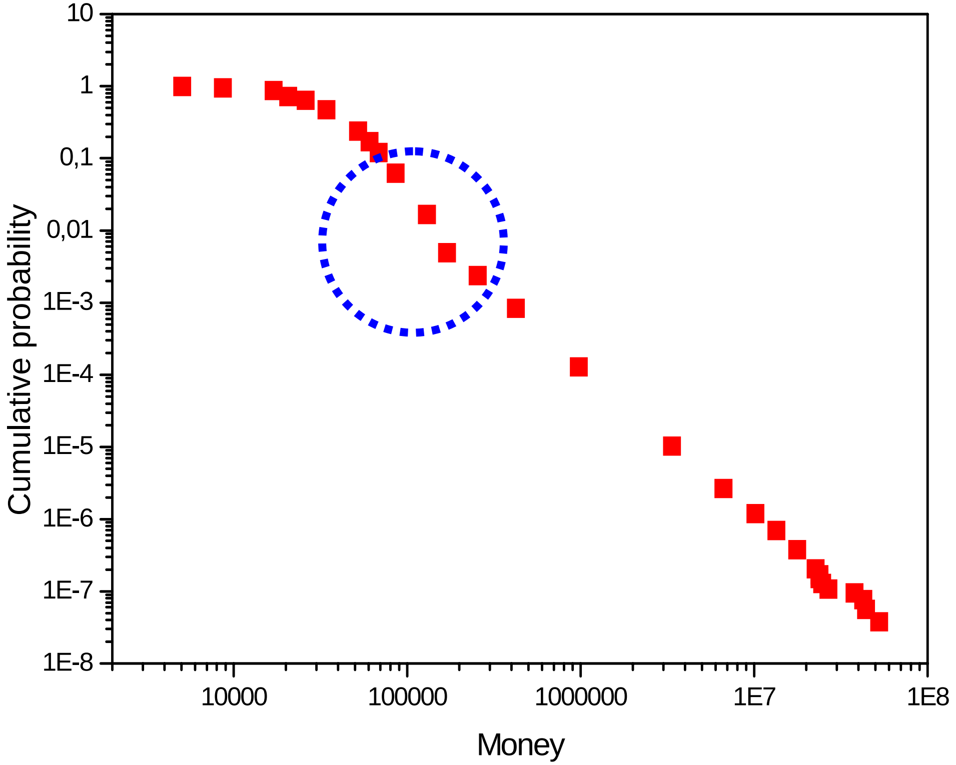


Income normalized by Average (Japan)
blue --60s
yellow -70s
red ---80s
green -90s
Cumulative probability
Income normalized by average
$10^0$
$10^{-1}$
$10^{-2}$
$10^{-3}$
$10^{-4}$
$10^{-5}$
$10^{-6}$
$10^{-7}$
$10^{-8}$
$10^{1}$
$10^{2}$
$10^{3}$
$10^{4}$
$10^{5}$

# Income normalized by Average (Japan)

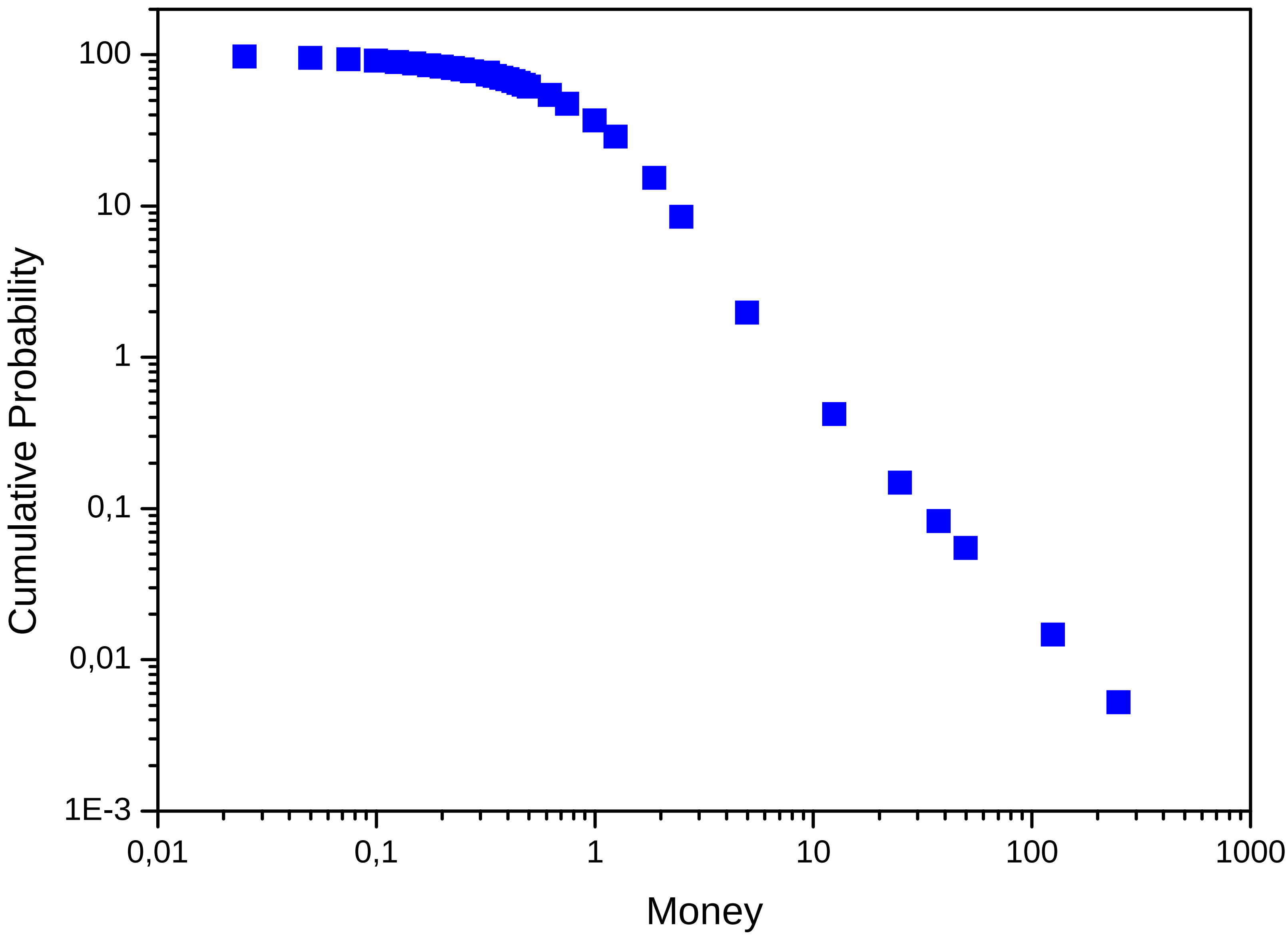


# Japón1999

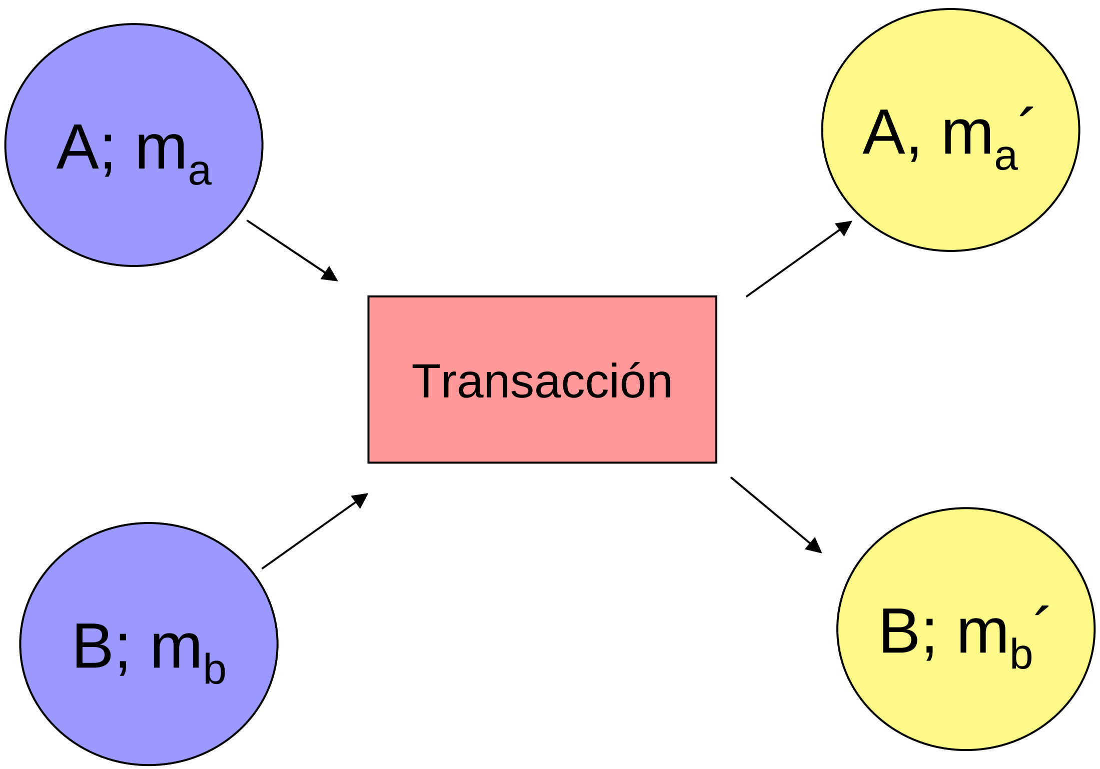



Los datos muestran dos regiones con diferentes formas, separadas por un punto de cambio abrupto

# EEUU 2001


Cumulative Probability
100
10
1
0,1
0,01
1E-3
0,01
0,1
1
10
100
1000
Money

# El modelo de la escuela de Kolkata: Un modelo cinético de los gases:




$$m_a(t') + m_b(t') = m_a(t) + m_b(t)$$

$$m_a(t') + m_b(t') = m_a(t) + m_b(t)$$

1)Versión inicial: un modelo naive - Todo el dinero se pone en juego

$$m_a(t') = \varepsilon\,[m_a(t) + m_b(t)]$$
$$m_b(t') = (1- \varepsilon)*[m_a(t) + m_b(t)]$$

ó

$$\Delta m = \varepsilon(m_a + m_b) - m_a$$
$$m_a(t') = m_a(t) + \Delta m$$
$$m_b(t') = m_b(t) + \Delta m$$

Produce una fdp con un decaimiento exponencial simple (Gibbs-Boltzmann).
No reproduce los datos empíricos. Reproduce gran parte de los datos de EEUU.

2) Modelo con ahorro, $\lambda$: Parte del dinero se pone en juego y una fracción $\lambda$ se ahorra:

$$m_a(t') = \varepsilon\,[(1-\lambda_a)m_a(t) + (1-\lambda_b)m_b(t)] + \lambda_a m_a$$
$$m_a(t') = (1-\varepsilon)\,[(1-\lambda_a)m_a(t) + (1-\lambda_b)m_b(t)] + \lambda_b m_b$$

$$\Delta m = \varepsilon\,(1 - \lambda_b)m_b - (1-\varepsilon)(1 - \lambda_a)m_a$$

Si $\lambda$ = constante : función gamma

Si $\lambda$ = distribuida: ley potencial + gamma

Los cálculos de modelado dan una concordancia cualitativa con los datos empíricos pero no explican el cambio de pendiente entre las dos regiones.

El análisis de los datos empíricos muestra que se ajustan bien a una suma de dos funciones:

´

$P(x) = n_a\, G(x) \;\; n_b T(x)$ $\qquad\qquad$ $n_a + n_b = 1$

•La función Gamma:

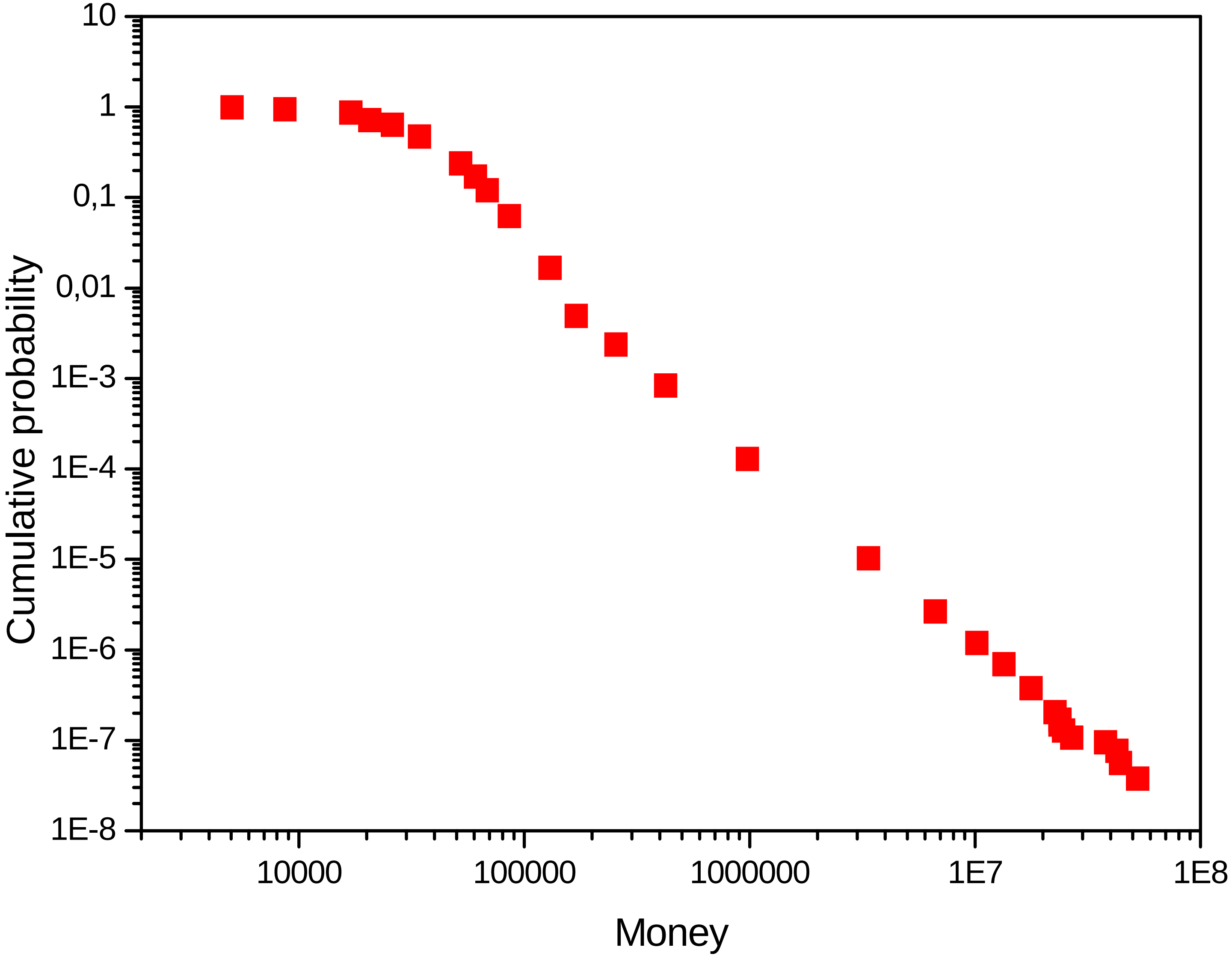
$$G(x)=N\, x^{(\alpha-1)} \exp(-x/\beta)$$

•La función Tsallis:

$$T(x)=N\, x^{n}\, [1-(1-q)\beta x]^{1/(1-q)}$$

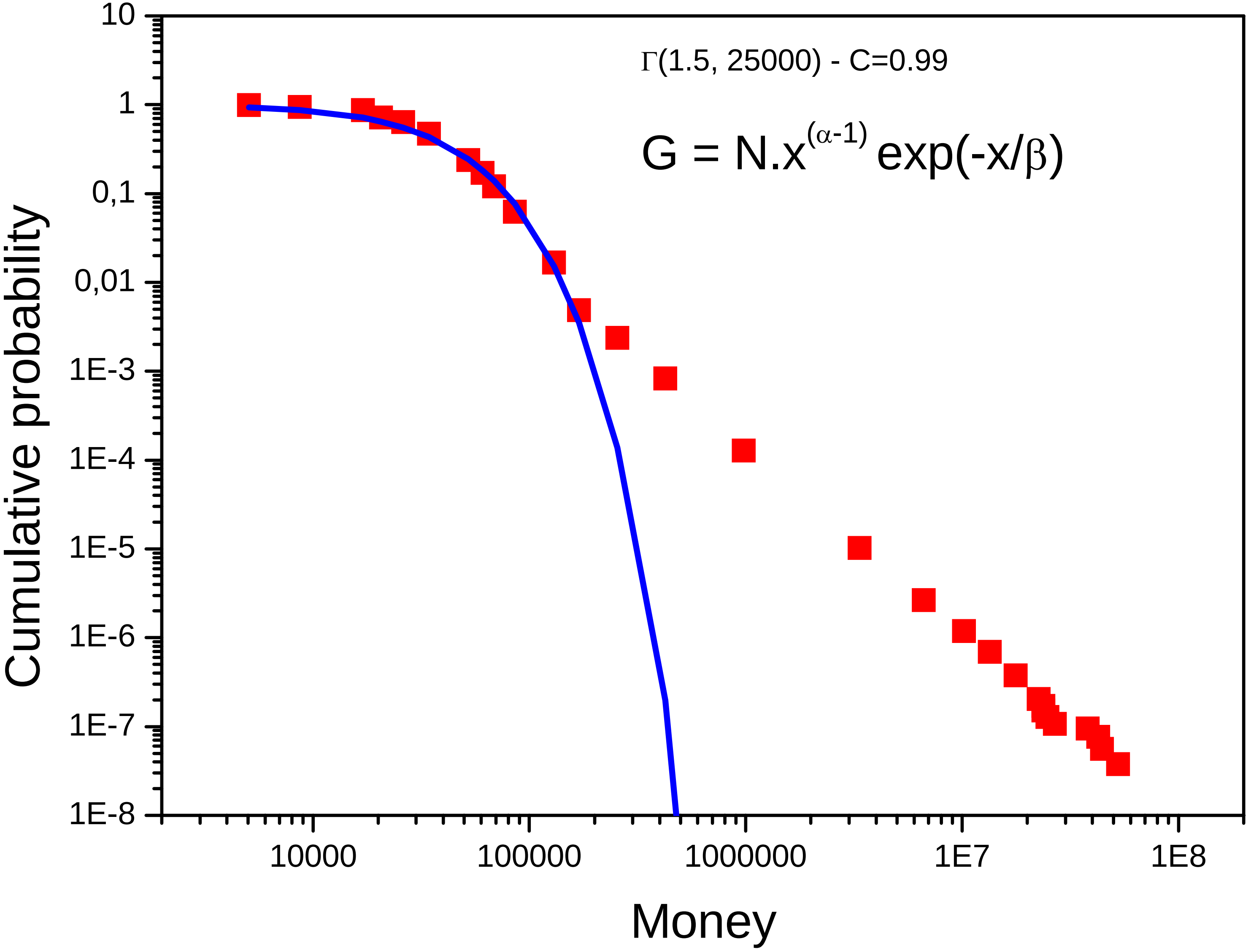
La función Tsallis tienen la importante propiedad de reducirse a una ley potencial para valores grandes de x

# Japón1999

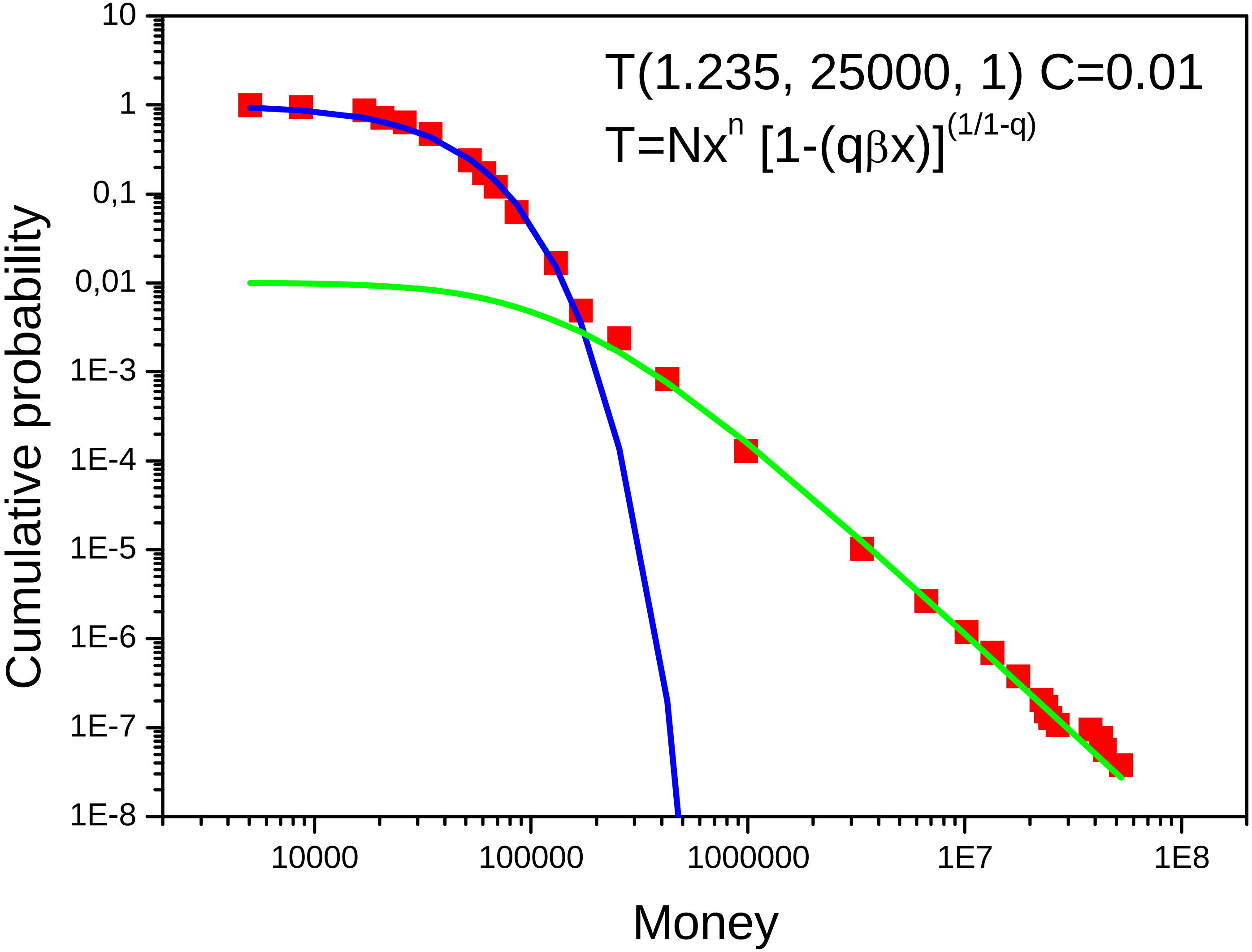


10
1
0,1
0,01
1E-3
1E-4
1E-5
1E-6
1E-7
1E-8
Cumulative probability
10000
100000
1000000
1E7
1E8
Money

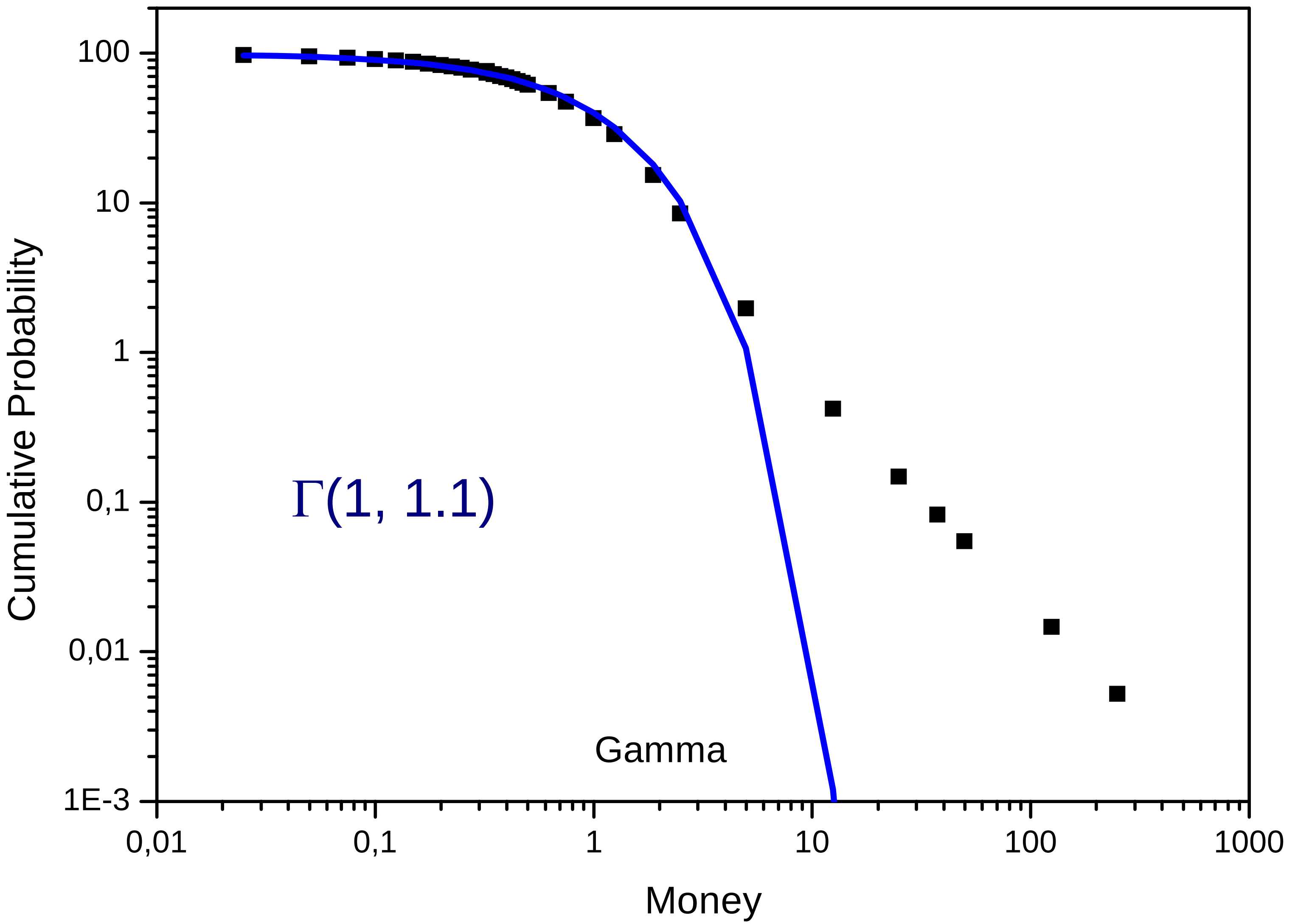
# Japón1999 – Función Gamma



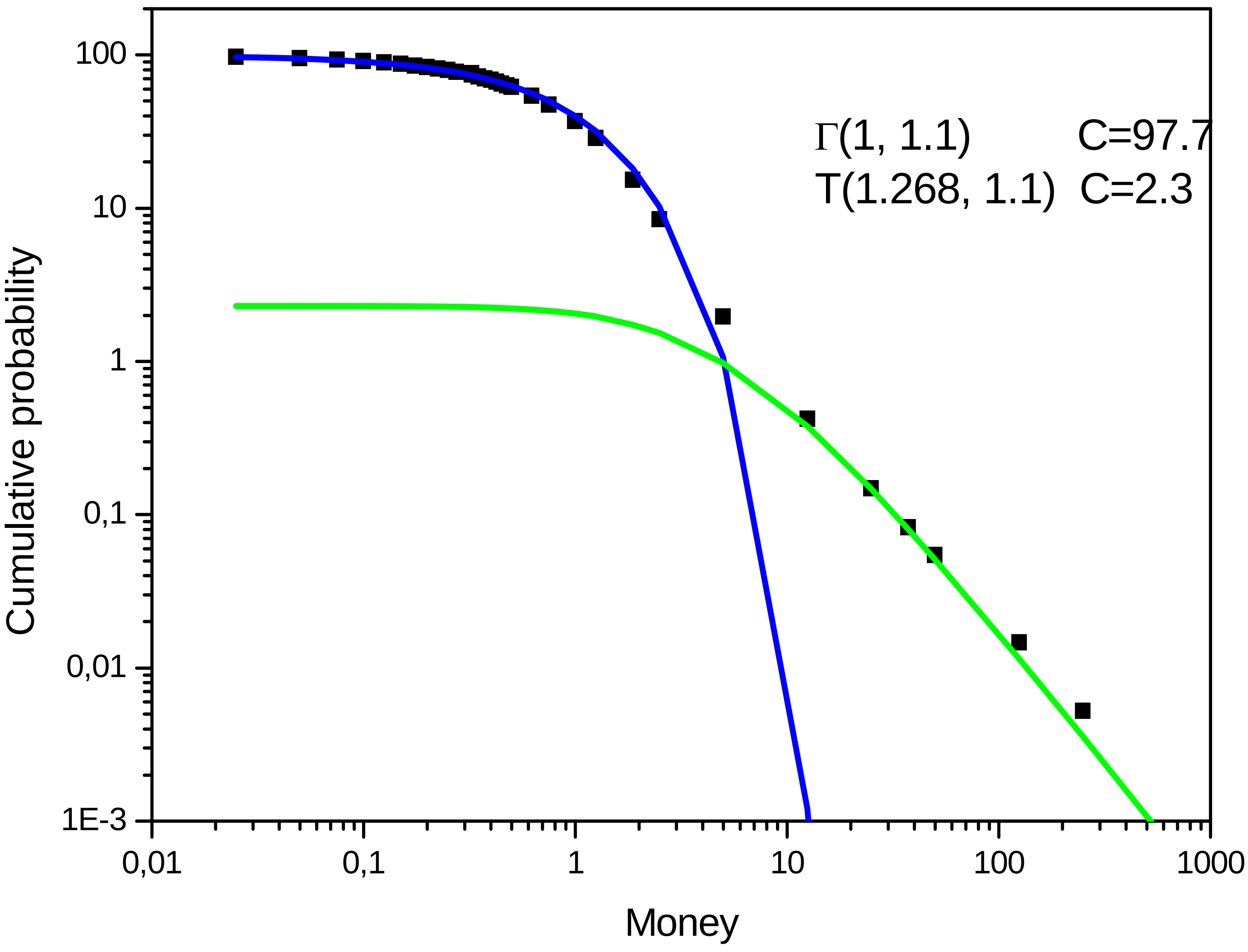
# Japón1999 – Función Tsallis



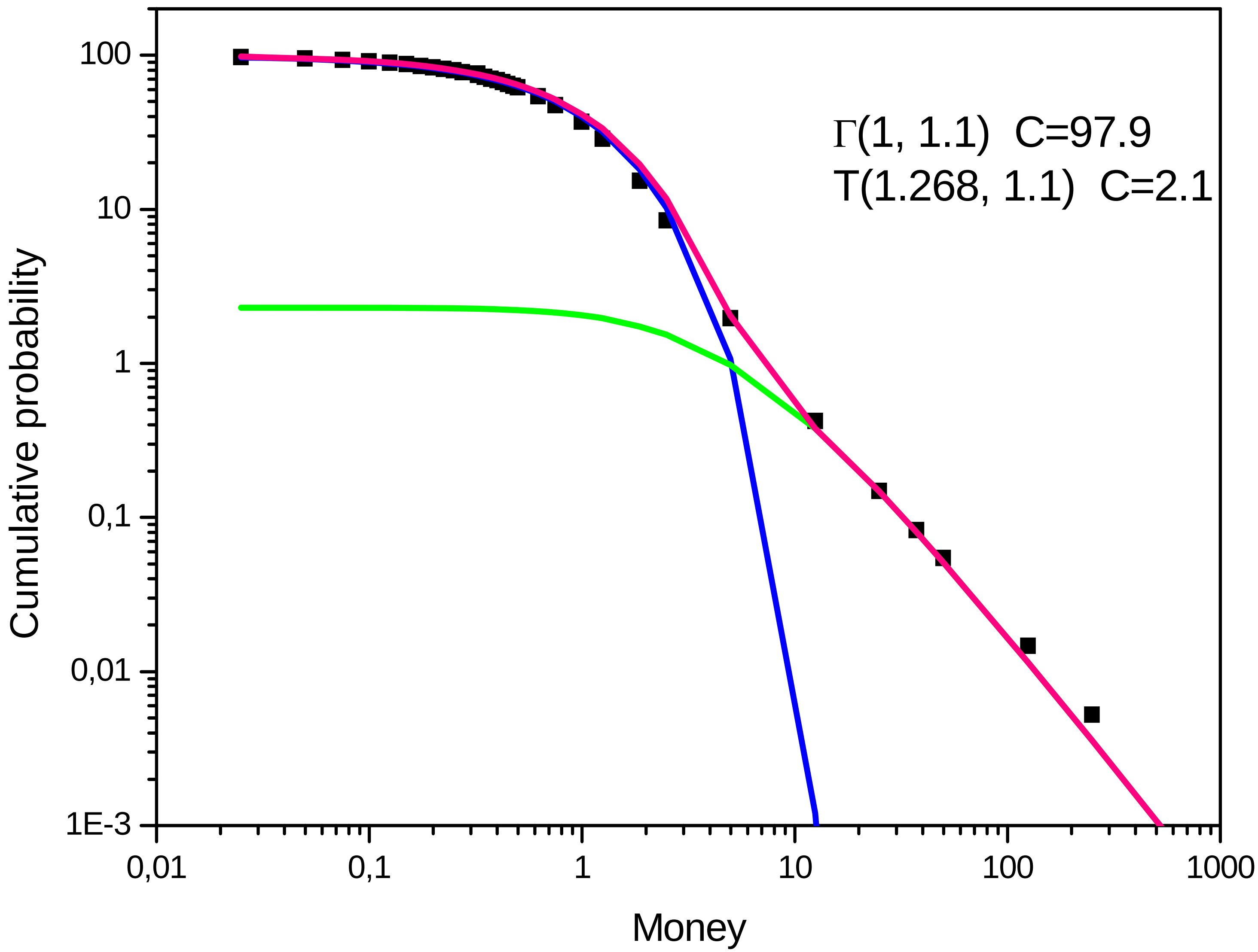
# EEUU 2001- Función Gamma



# EEUU 2001-Función Tsallis



# EEUU 2001

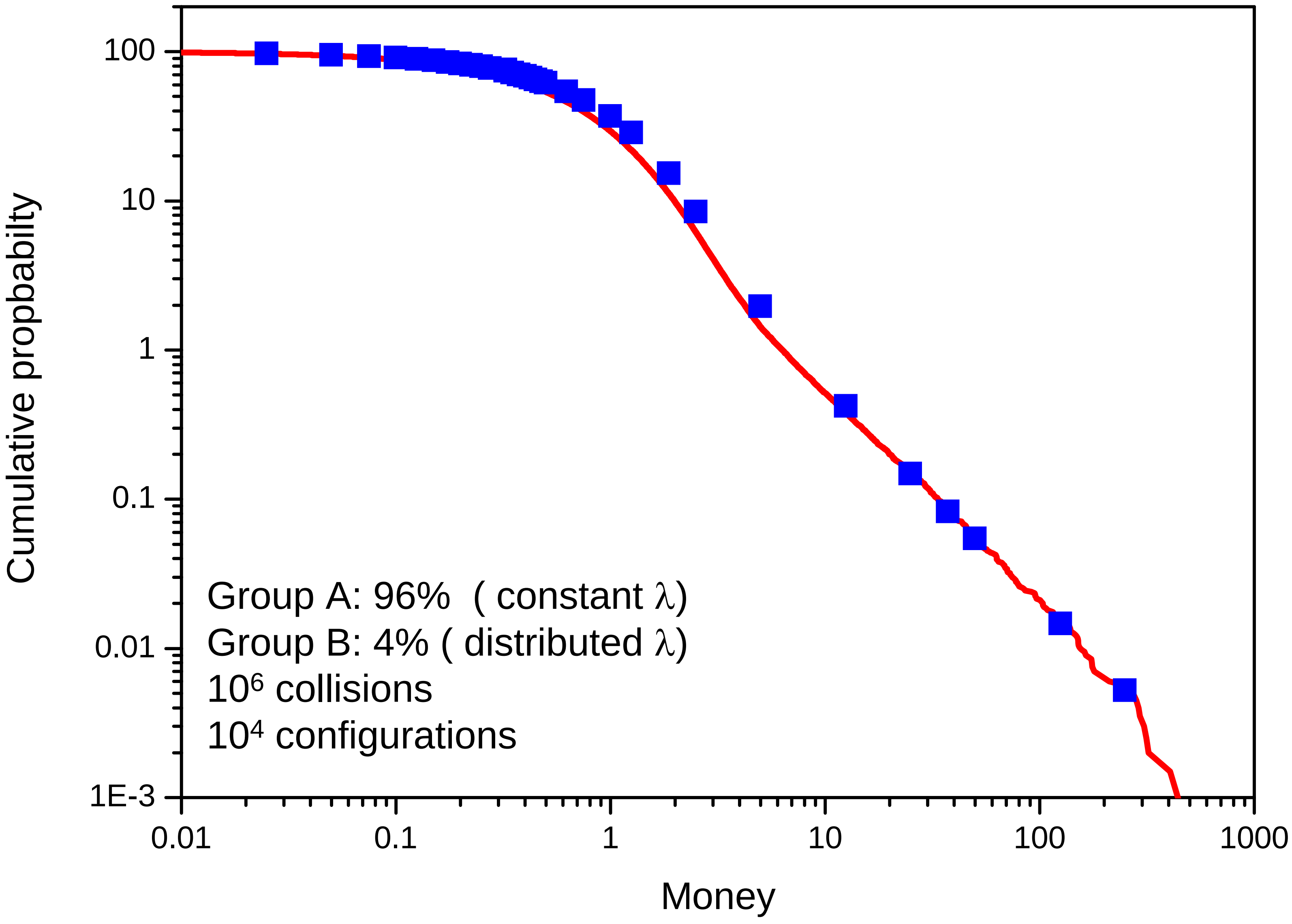


Γ(1, 1.1)  C=97.9
T(1.268, 1.1)  C=2.1
Cumulative probability
100
10
1
0,1
0,01
1E-3
0,01
0,1
1
10
100
1000
Money

# Modelo con dos conjuntos interactuantes diferentes

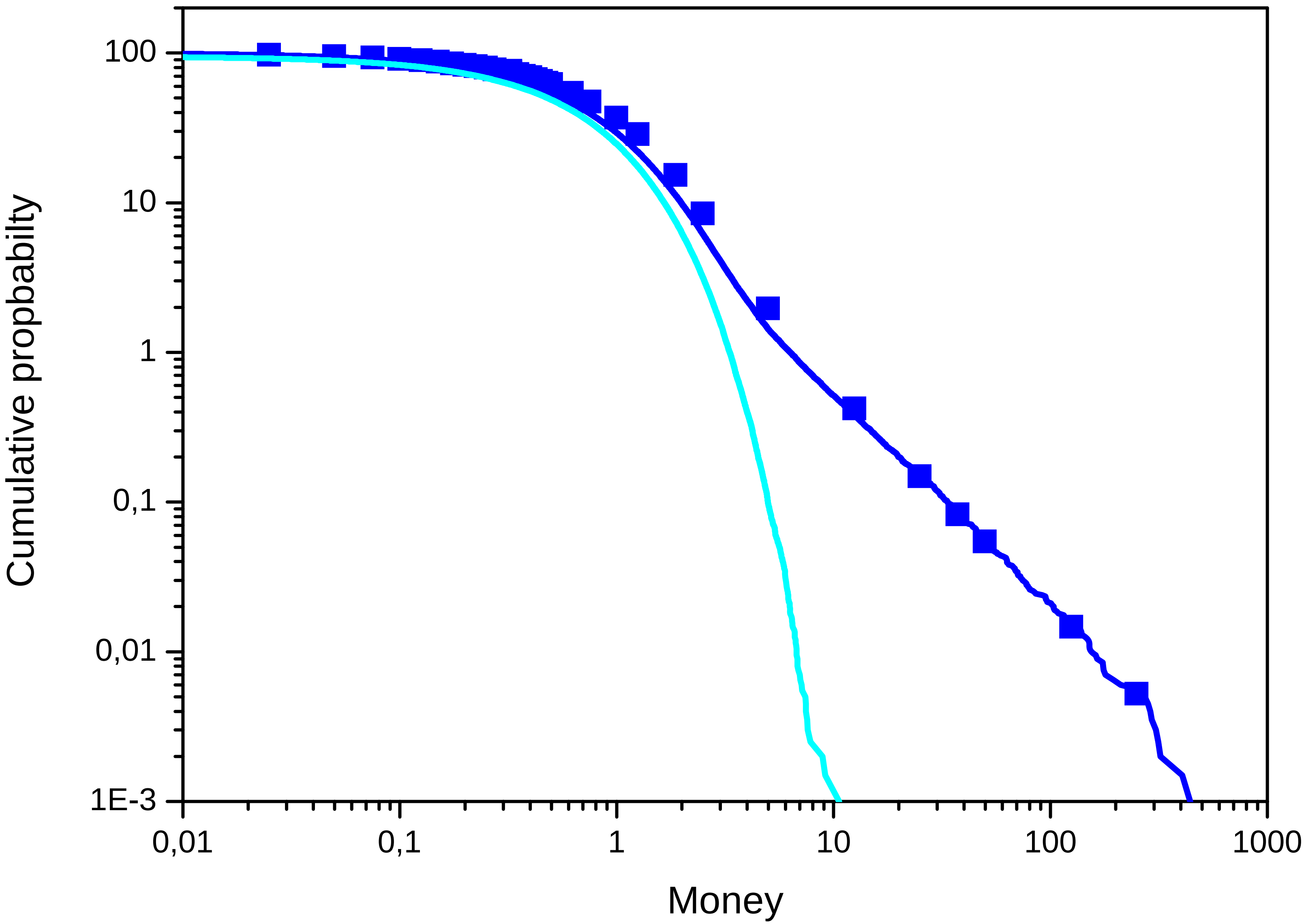
- Conjunto A: fracción $n_a$ con $\lambda_a$ = constante
- Conjunto B: fracción $n_b$ con $\lambda_b$ = distribuida

# EEUU 2001



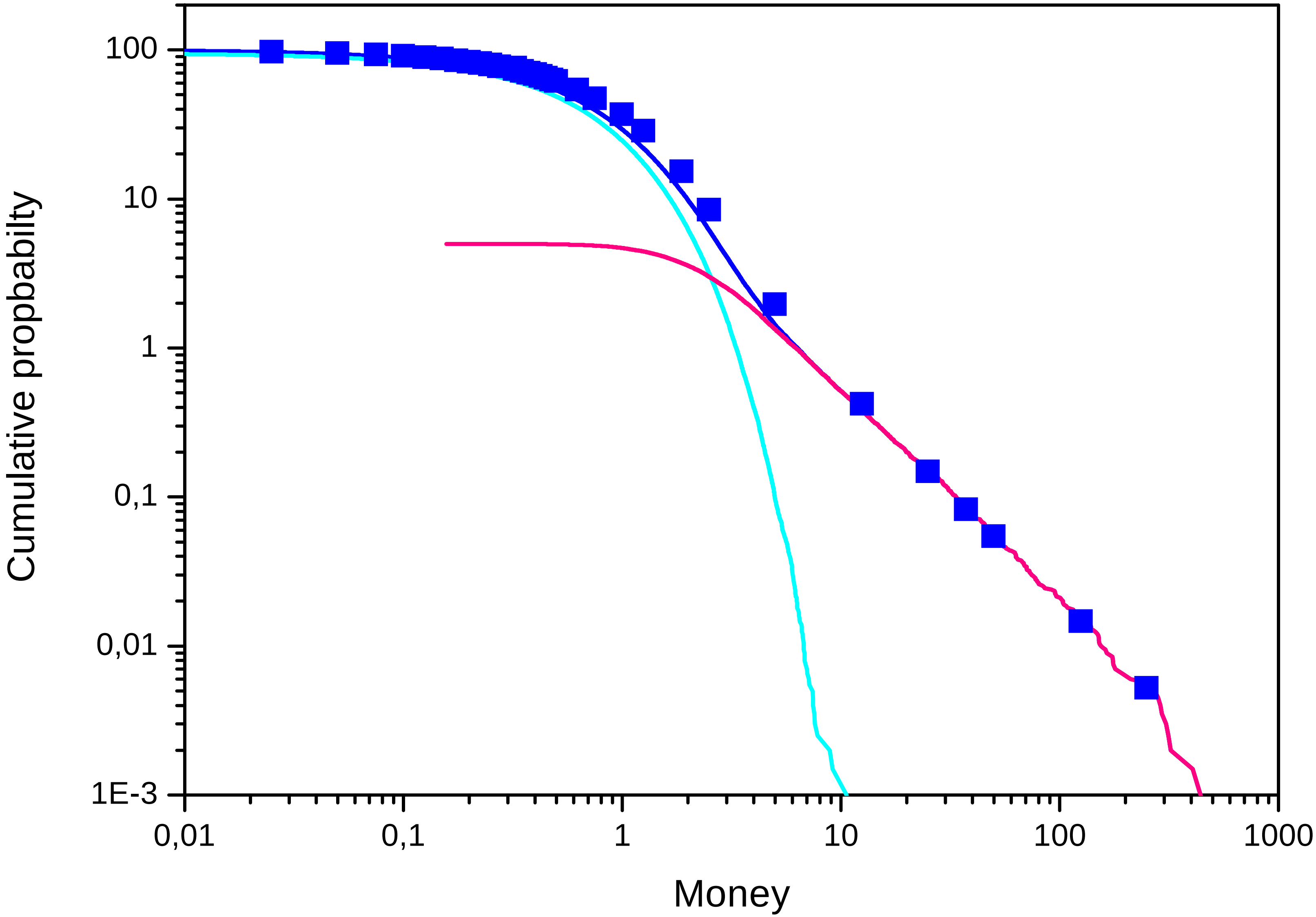
Cumulative propbabilty
100
10
1
0.1
0.01
1E-3
0.01
0.1
1
10
100
1000
Money
Group A: 96% ( constant λ)
Group B: 4% ( distributed λ)
$10^6$ collisions
$10^4$ configurations

# EEUU 2001



100
10
1
0,1
0,01
1E-3
Cumulative propbabilty
0,01
0,1
1
10
100
1000
Money

# EEUU 2001



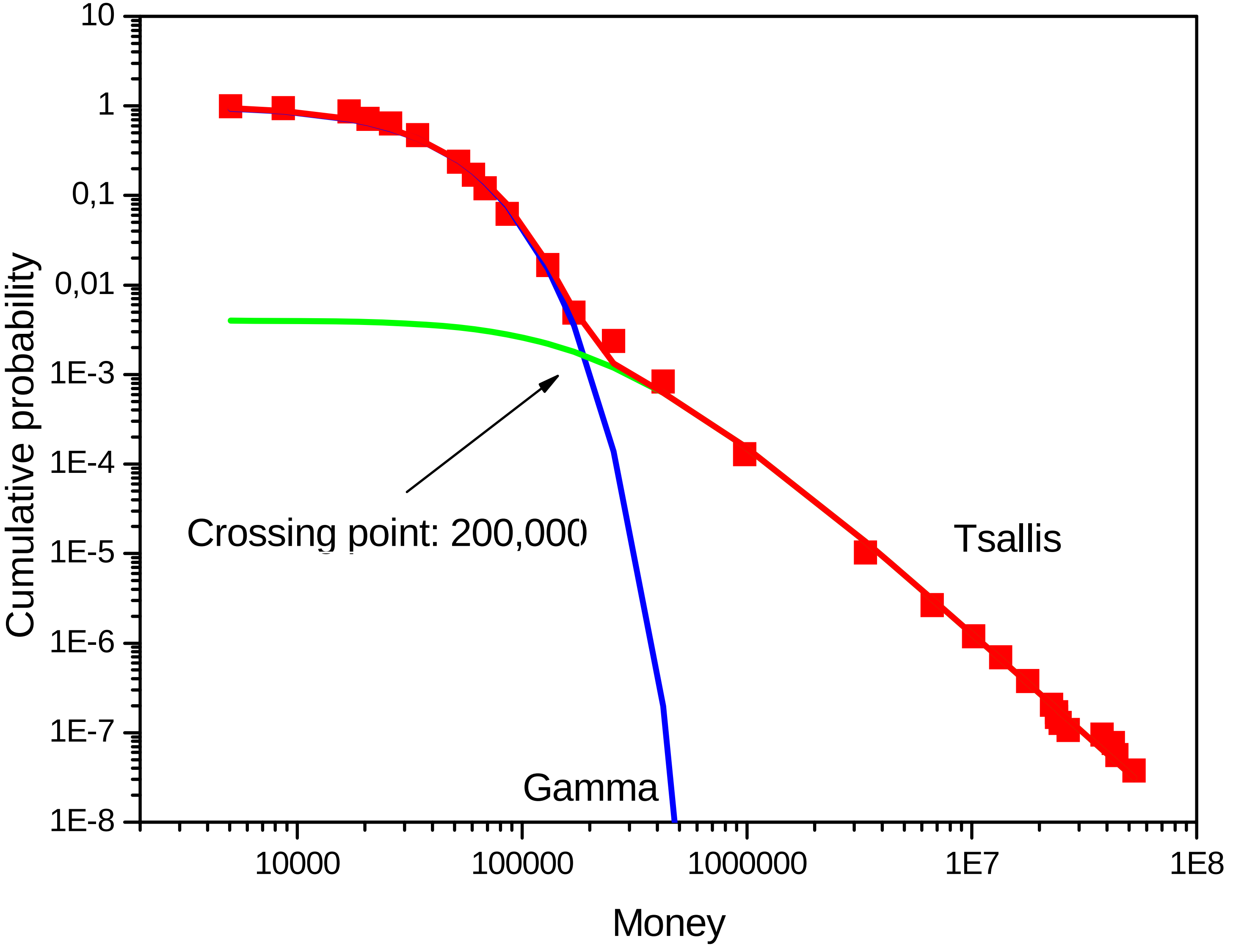
Cumulative propbabilty
100
10
1
0,1
0,01
1E-3
0,01
0,1
1
10
100
1000
Money

Los cálculos de modelado sugieren que:

•Los datos empíricos surgen de la agregación de dos conjuntos diferentes de agentes económicos.

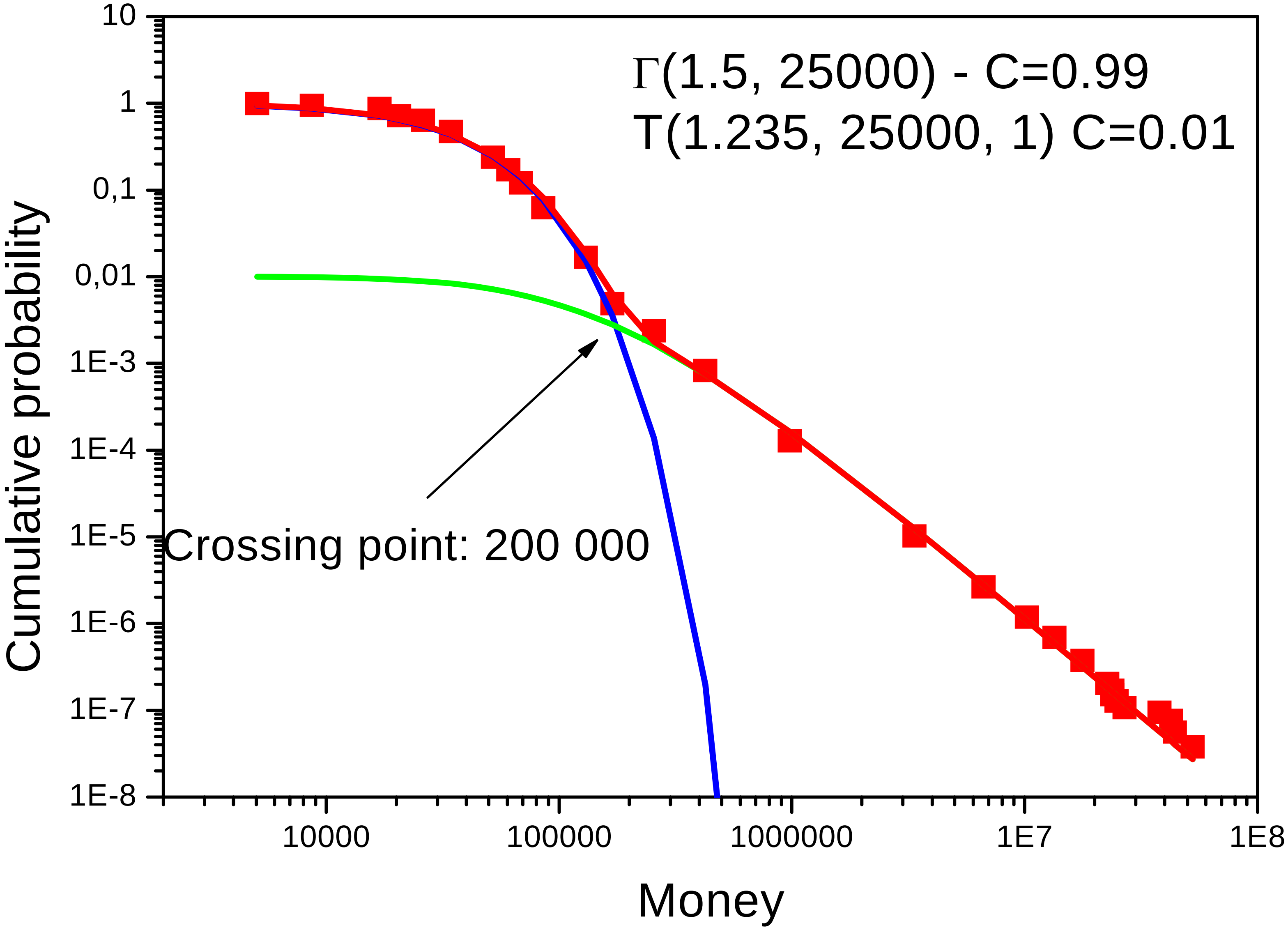
•Ambos grupos se encuentran en estado estacionario.

# Japón1999



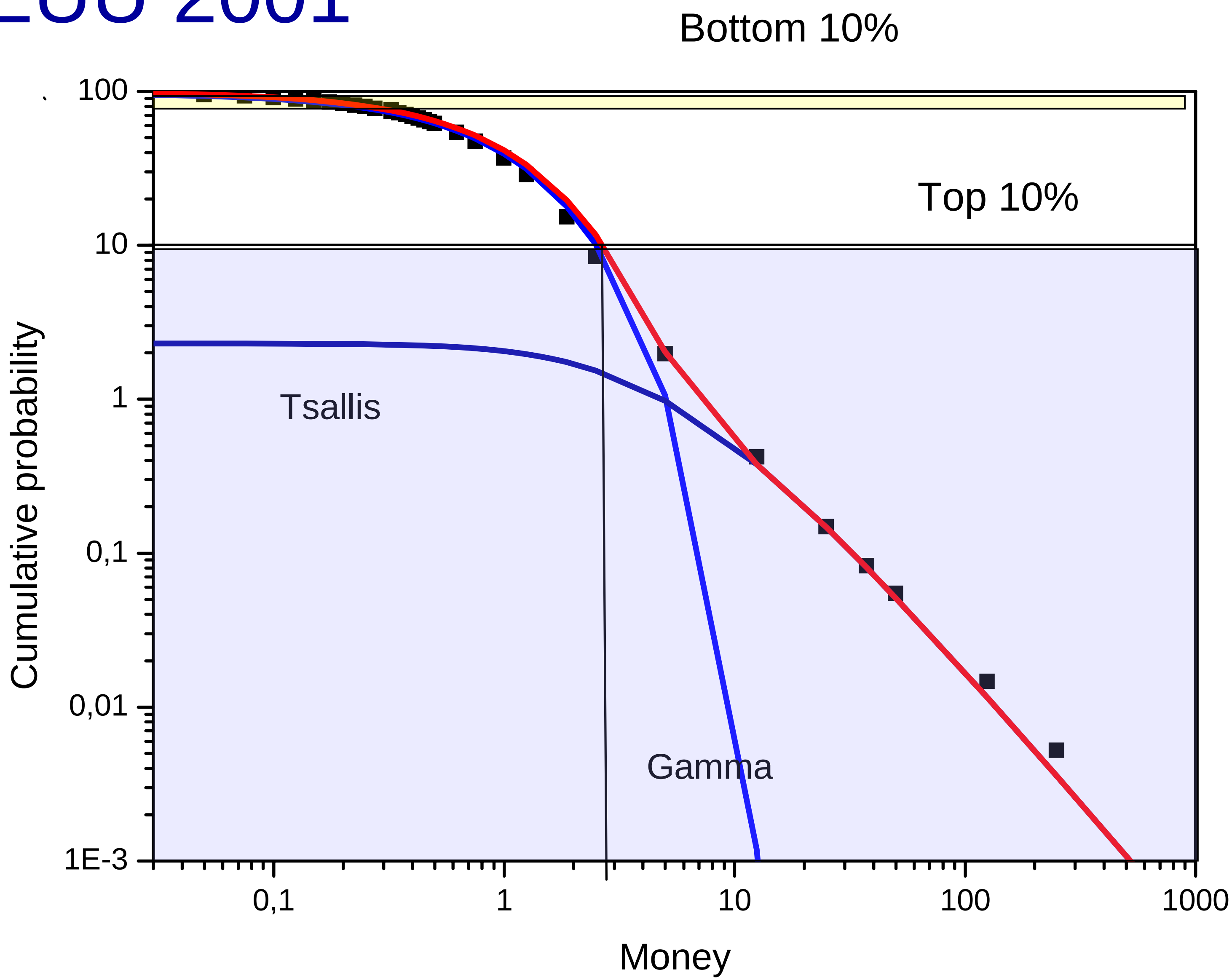
Cumulative probability
10
1
0,1
0,01
1E-3
1E-4
1E-5
1E-6
1E-7
1E-8
10000
100000
1000000
1E7
1E8
Money
Crossing point: 200,000
Tsallis
Gamma

# Japón1999



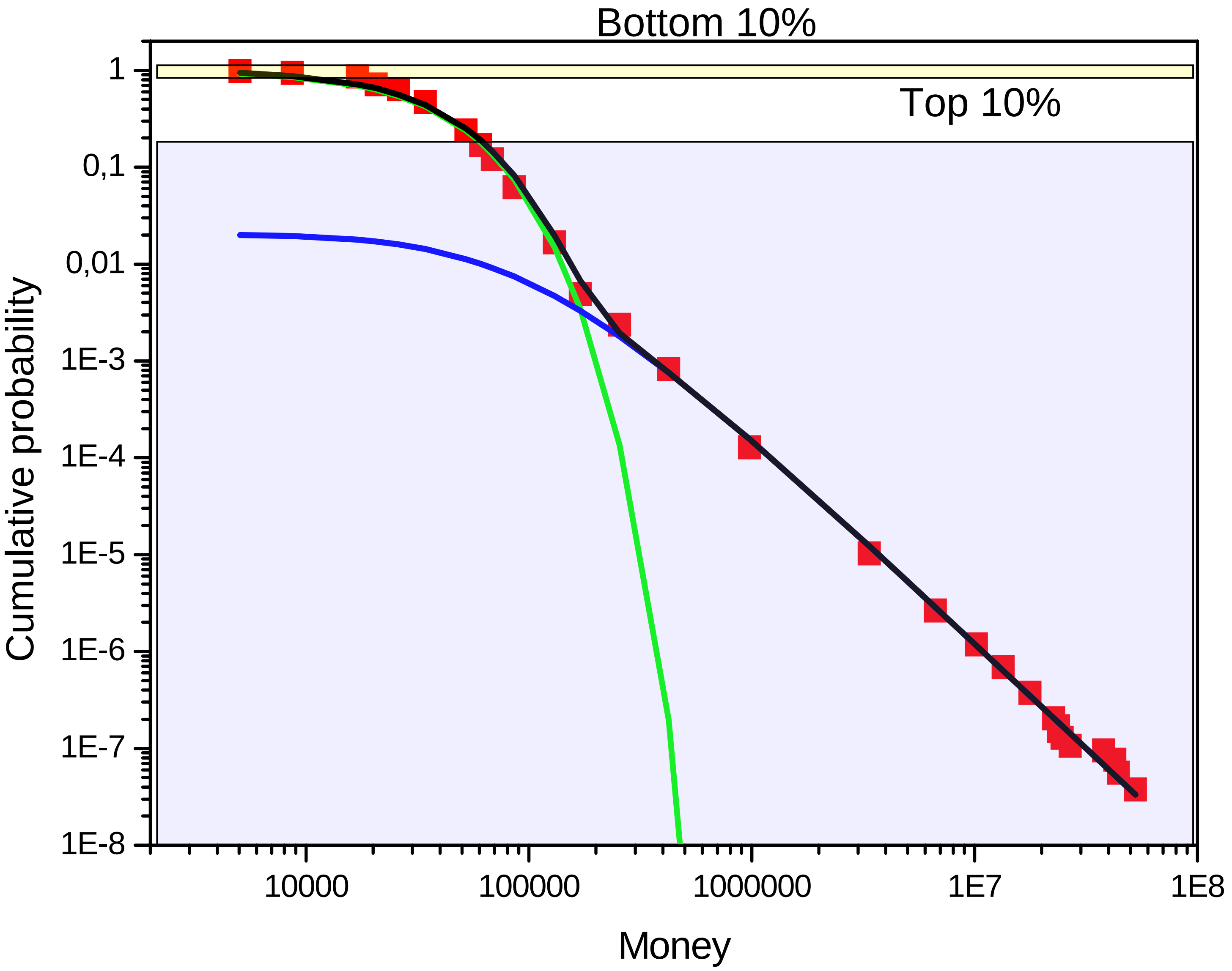
Γ(1.5, 25000) - C=0.99
T(1.235, 25000, 1) C=0.01
Crossing point: 200 000
Cumulative probability
Money
10
1
0,1
0,01
1E-3
1E-4
1E-5
1E-6
1E-7
1E-8
10000
100000
1000000
1E7
1E8

# EEUU 2001



Bottom 10%
Top 10%
Tsallis
Gamma
Cumulative probability
Money
100
10
1
0,1
0,01
1E-3
0,1
1
10
100
1000

# Japón1999



Bottom 10%
Top 10%
Cumulative probability
1
0,1
0,01
1E-3
1E-4
1E-5
1E-6
1E-7
1E-8
10000
100000
1000000
1E7
1E8
Money

# Japón 1999

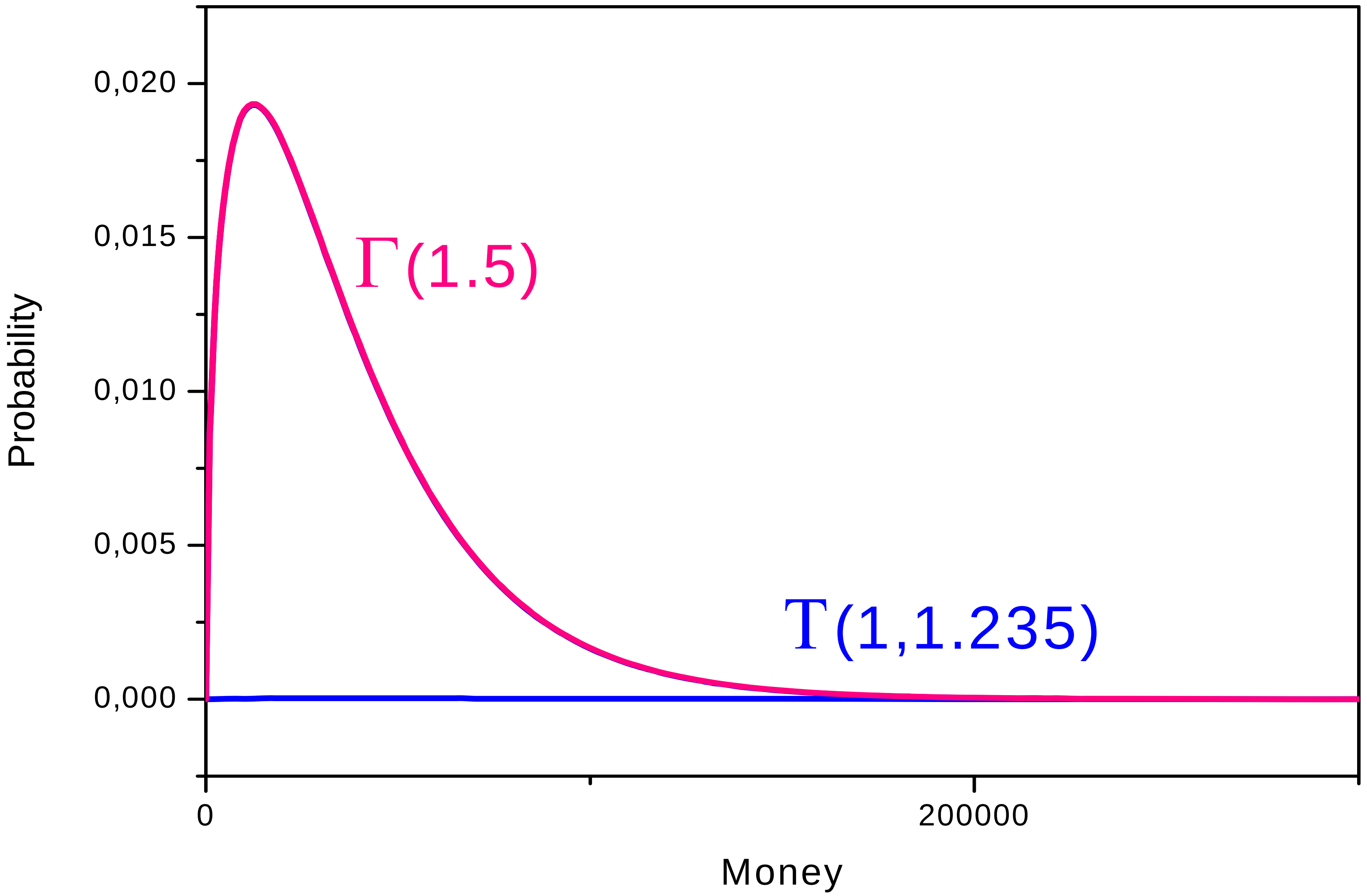
De estos resultados obtenemos als densidades de probabilidad, P:

$P_{gamma=0.99.N.x^{0.5}exp(-x/25000)}$

$P_{Tsallis=0.01.N.x.[1+0.235.X/25000)^{-1/0.235}}$

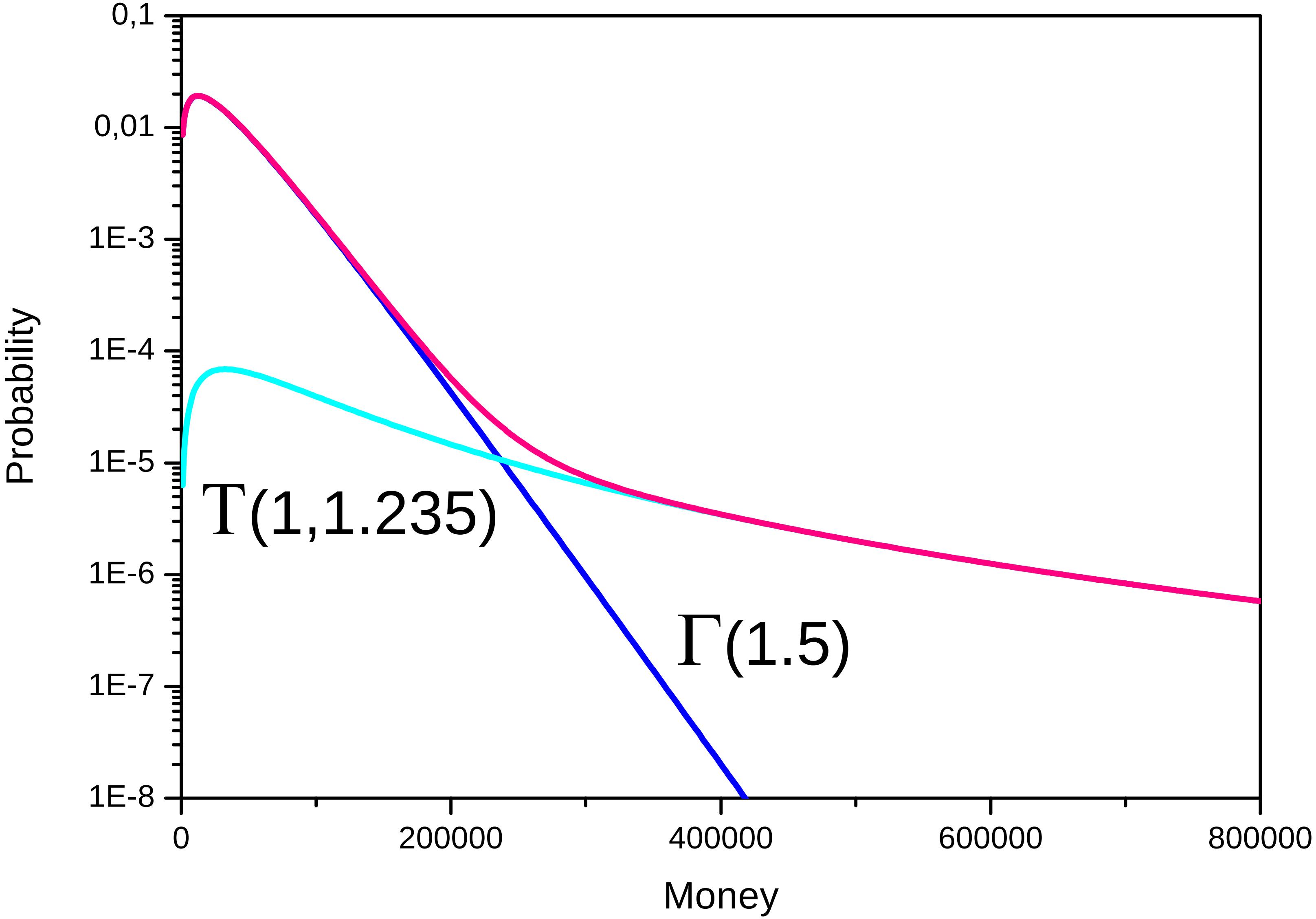
$P_{total}=P_{gamma} + P_{Tsallis}$

# Japón1999



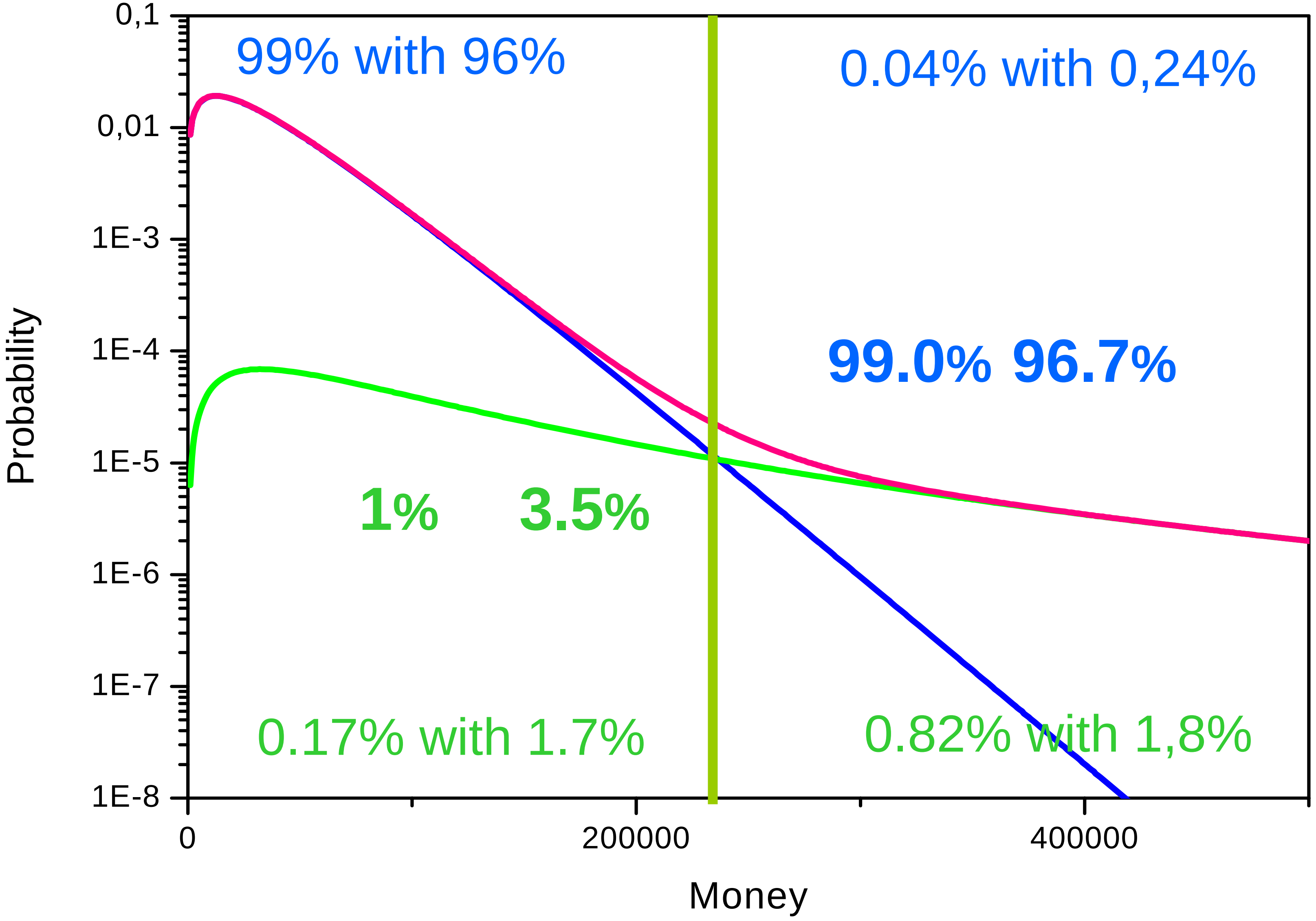
0,020
0,015
0,010
0,005
0,000
Probability
Γ(1.5)
T(1,1.235)
0
200000
Money

# Japón1999



0,1
0,01
1E-3
1E-4
1E-5
1E-6
1E-7
1E-8
Probability
T(1,1.235)
Γ(1.5)
0
200000
400000
600000
800000
Money

# Japón1999



99% with 96%
0.04% with 0,24%
99.0% 96.7%
1% 3.5%
0.17% with 1.7%
0.82% with 1,8%
Probability
0,1
0,01
1E-3
1E-4
1E-5
1E-6
1E-7
1E-8
0
200000
400000
Money

Gamma es invariante con la escala, así que el aumento de $\beta$ aumenta <x> ( la riqueza) pero el cociente

R= Top10%/Bottom 10%

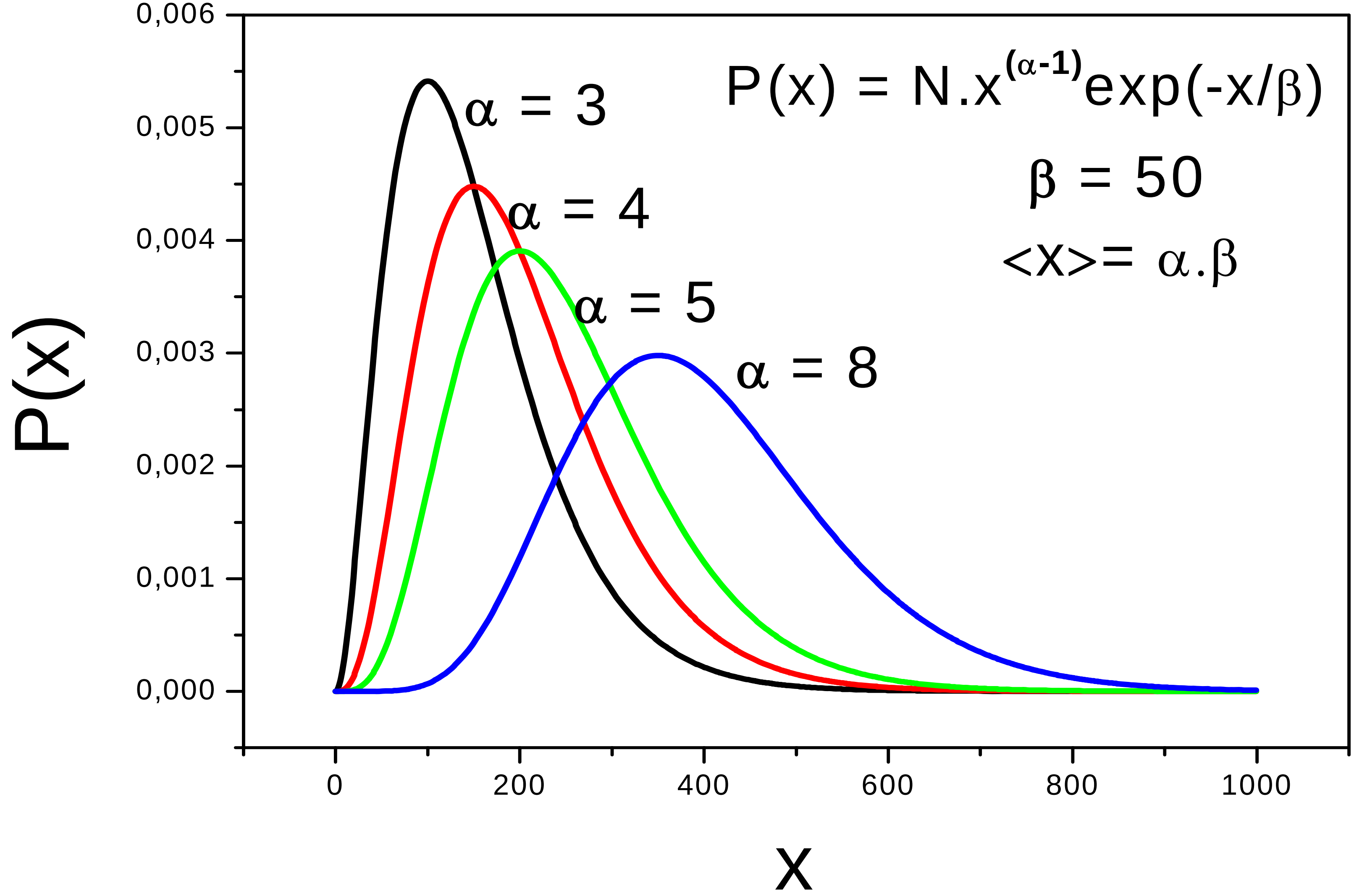
Permanece constante.

El coeficiente de Gini ( 0 = igualdad perfecta; 1= desigualdad perfecta)

$$G = \pi^{-1/2}\Gamma(\alpha+1/2)/\Gamma(\alpha+1)$$

es independiente de $\beta$

El aumento de la riqueza mediante $\beta$ no cambia la desigualdad.



0,006
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001
0,000
0
200
400
600
800
1000
P(x)
x
α = 3
α = 4
α = 5
α = 8
P(x) = N.x^(α-1)exp(-x/β)
β = 50
<x>= α.β

- Si $\alpha$ ( un parámentro de la forma) aumenta, <x> aumenta y el cociente R= 10%superior /10% inferior disminuye:

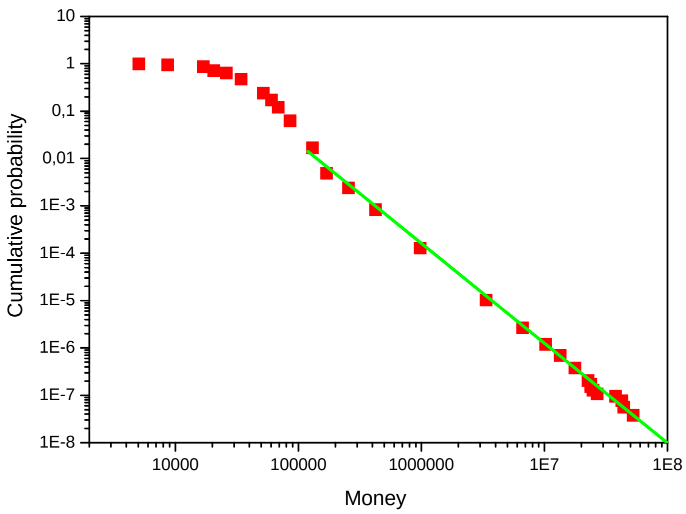
| $\alpha$ | $\beta$ | **<x>** | **R** | **G*** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 20 | 66 | 0.69 |
| 2 | 20 | 40 | 14 | 0.52 |
| 3 | 20 | 60 | 8 | 0.43 |
| 4 | 20 | 80 | 6 | 0.38 |
| 5 | 20 | 100 | 5 | 0.34 |

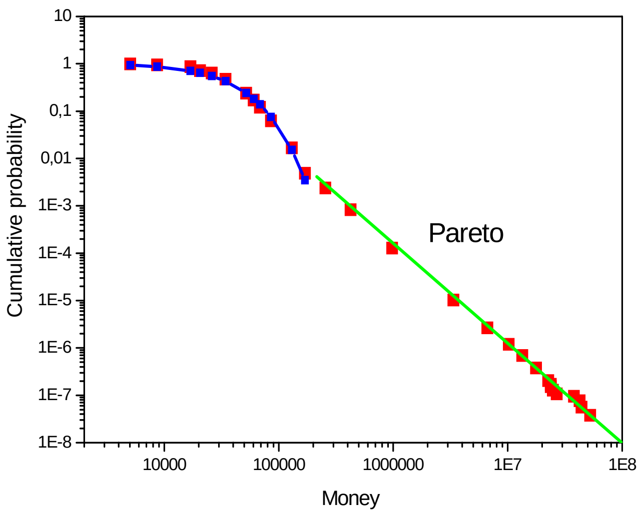
* *Coeficiente de Gini para una función Gamma*

Aumentar la riqueza a través de $\alpha$ disminuye la desigualdad

# Conclusiones

La distribución del ingreso no es una función única, sino la suma de distribuciones correspondientes a distintos grupos de agentes económicos, que difieren en la estadística que describe su comportamiento.




Pareto: $A\ x^{-n}$
Proceso multiplicativo: Inversionistas

Función Gamma: $N\ x^{\alpha-1} \exp(-x/b)$
Procesos aditivos : salarios

La distribución  puede ser descripta cuantitativamente, en el intervalo completo de datos, por el modelo derivado de la teoría cinética de los gases.

Los grupos que componen el sistema se encuentran en estado estacionario

La medición de la desigualdad de la distribución del ingreso en base al cociente  10%superior/10%inferior implica dos grupos diferentes

El grupo con ingresos bajos y medios  corresponde a agentes que preciben salarios (procesos aditivos). Contribuyen casi exclusivamente a esta región del ingreso.   La distribución es bien descripta por una función Gamma (Comportamiento Gibbs-Bolztmann)

La distribución de ingresos del otro grupo corresponde a inversores, exitosos o no (Procesos multiplicativos). El comportamiento aparente es una contribución a la cola de la distribución(exitosos),tipo Pareto, pero en realidad contribuyen en el intervalo completo de ingresos. Su comportamiento general es bien descripto por una función de Tsallis.

La forma de la distribución es invariante con la escala. Por ende, no se puede modificar variando el monto total del ingreso.

La única forma de mejorar la distribción es aumentado el valor de a en la función de distribución ( $P = N\ x^{(\alpha-1)} \exp(-x/b)$ )