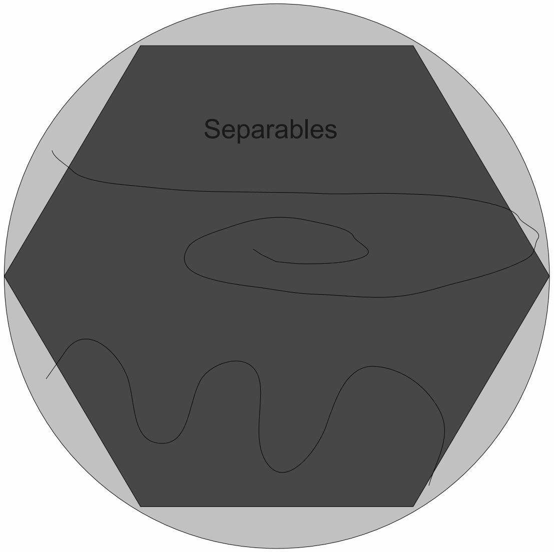
Evolución asintótica de sistemas cuánticos abiertos

G.A. Raggio & P. Zangara[a]

Seminario GTMC-FaMAF, 22-IX-09

[a] Trabajo Especial de Licenciatura en curso

Problema: ¿Como evoluciona la separabilidad/entrelazamiento en el tiempo ?



Dada trayectoria $\rho(t)$:

$\sigma := \inf \{t \geq 0 : \rho(s)$ es separable para todo $s > t\}$

$\varepsilon := \inf\{ t \geq 0 : \rho(s)$ es entrelazado para todo $s > t\}$

Dinámica de sistemas cuánticos

Desde 1976 se conoce (Gorini, Kossakowski & Sudarshan / Lindblad) la forma general del generador de la dinámica $\{\alpha_t : \ t \geq 0\}$ de un sistema cuántico que satisface:

- $\alpha_t \circ \alpha_s = \alpha_{t+s}$; $t \mapsto \alpha_t$ es lo suficientemente continuo.
- $\alpha_t(A + zB) = \alpha_t(A) + z\alpha_t(B)$; $\alpha_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;
- α_t es completamente positivo;

El generador L tal que $\alpha_t = \exp(tL)$, tiene la forma:

$$L(A) = i[H, A] + \sum_j V_j^* A V_j - \frac{1}{2}\left(V_j^* V_j A + A V_j^* V_j\right) \ ,$$

¡Ojo! la partición del Liouvilleano L en la parte reversible (conmutador con H) y la parte disipativa (el resto) <u>no es unívoca</u>.
En la rep. de Schrödinger la evolución es $\nu_t = \exp(t\mathcal{L})$ tal que para todo operador densidad D y toda observable A

$$tr(\nu_t(D)A) = tr(D\alpha_t(A)) \ .$$

$$\mathcal{L}(D) = -i[H, D] + \sum_j V_j D V_j^* - \frac{1}{2}\left(V_j^* V_j D + D V_j^* V_j\right) \ ,$$

Otras expresiones equivalentes

$$L(A) = i[H, A] + \frac{1}{2}\sum_j (V_j^*[A, V_j] + [V_j^*, A]V_j)$$

$$= YA + AY^* + \psi(A) \ ,$$

donde $\psi(A) = \sum_j V_j^* A V_j$ y $Y = iH - \psi(\mathbf{1})/2$.

Geometría básica de los estados

El **soporte** de un estado D, $s[D]$, es el mínimo (orto-) proyector P para el cual $tr(DP) = 1$; $s[D]$ es la suma de los proyectores espectrales de D a autovalores no nulos; alternativamente el complemento del proyector al núcleo de D.

El conjunto $\mathcal{S}$ de estados es convexo y cerrado respecto de la métrica $tr(|D - D'|)$. Sus puntos extremales (i.e. no descomponibles, puros,...) son los proyectores de rango 1.

Una **cara** $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ es un subconjunto convexo cerrado y estable respecto de la descomposición convexa: Si $D \in \mathcal{F}$ y $D = \lambda D_1 + (1 - \lambda) D_2$ con $0 < \lambda < 1$ y $D_{1,2} \in \mathcal{S}$ entonces $D_{1,2} \in \mathcal{F}$.

Teorema: Toda cara $\mathcal{F}$ es de la forma

$$\mathcal{F}_P = \{D \in \mathcal{S} : tr(DP) = 1\}$$

donde P es un proyector.
Por lo tanto: D está en la cara asociada con P si y sólo si $s[D] \leq P$.
La estructura facial del espacio de estados de un sistema cuántico es muy distinta a la de un poliedro. Toda cara cuyo proyector asociado tiene dimensión (rango) 2 o mas, contiene infinitos estados puros (i.e. caras minimales).

Asintótica

Coctel de resultados de Groh (80's), Frigerio & Verri (80's), Fagnola & Rebolledo (ahora), Baumgartner & Narnhofer (ahora), R. & Z. (ya).

Terminología: ν_t (o α_t) es: **relajante** si para todo D $\lim_{t\to\infty} \nu_t(D)$ existe; **equilibrante** si es relajante y el estado estacionario es único ($\nu_t(D) \to E$).

En principio: si quiere saber la asintótica de ν_t o de α_t calcule el espectro del operador L (es el mismo que el de $\mathcal{L}$) y vayase a descansar.

Asintótica, II

A) Son equivalentes para un proyector P:

1. La cara asociada a P es invariante: $\nu_t(\mathcal{F}_P) \subset \mathcal{F}_P$;
2. $\alpha_t(P) \geq P$;
3. $(\mathbf{1} - P)(-iH - \frac{1}{2}\sum_j V_j^* V_j)P = 0$ & $(\mathbf{1} - P)V_j P = 0$.

B) Si la cara $\mathcal{F}_P$ es invariante y no contiene a niguna otra cara invariante entonces hay en ella un único estado estacionario y la restricción de ν_t a esta cara es equilibrante.

Asintótica, III

C) Si ν_t admite una familia fiel de estados invariantes $[Q \geq 0$ & $tr(DQ) = 0$ para todo estado invariante D, $\Rightarrow \; Q = 0]$ entonces:

- (1) ν_t es relajante o sino (2) existe una dinámica <u>quasiperiódica</u> σ_t tal que $|\nu_t(D) - \sigma_t(D)| \rightarrow 0$ para todo $D \in \mathcal{S}$.
- ν_t es relajante si y solo si $\{H, V_j, V_j^*\}' = \{V_j, V_j^*\}'$.

Ejemplo I

En $\mathbb{C}^3$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 \end{pmatrix} \ , \ \ V = \begin{pmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$\{H\}' = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \ , \ \{V\}' = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo I (continuado)

$$\{H, V\}' = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \neq \{V\}' \, .$$

Por C) ν_t no es relajante.

$$\mathcal{L}(B) = \begin{pmatrix} 0 & , & -B_{12}/2 & , & (-1+2i)B_{13}/2 \\ -B_{21}/2 & , & 0 & , & iB_{23} \\ (-1-2i)B_{31}/2 & , & -iB_{32} & , & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Ejemplo I (fin)

Los estados invariantes son $\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1-t-s \end{pmatrix} : \ 0 \leq t, s \leq 1 \right\}$ y esta familia es fiel. Por C) ν_t es asintóticamente periódico. En efecto:

$$\nu_t(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{-t/2} & \rho_{13}e^{-(1-2i)t/2} \\ c.c & \rho_{22} & \rho_{23}e^{it} \\ c.c & c.c & \rho_{33} \end{pmatrix}$$

Asintótica, IV

D) Si ν_t admite un único estado invariante y este es puro y si no hay observables invariantes no triviales entonces ν_t es equilibrante.

Ejemplo II

En $\mathbb{C}^3$, $H = 0$, $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$L(A) = \begin{pmatrix} 0 & , & -A_{12}/2 & , & -A_{13}/2 \\ -A_{21}/2 & , & A_{11} - A_{22} & , & A_{12} - A_{23} \\ -A_{31}/2 & , & A_{21} - A_{32} & , & A_{22} - A_{33} \end{pmatrix} .$$

$L(A) = 0$ si y solo si $A = z\mathbf{1}$: no hay observables fijas no triviales.

Ejemplo II (continuado)

$$\mathcal{L}(B) = \begin{pmatrix} B_{22} & , & B_{23} - B_{12}/2 & , & -B_{13}/2 \\ B_{32} - B_{21}/2 & , & B_{33} - B_{22} & , & -B_{23}/2 \\ -B_{31} & , & -B_{32} & , & -B_{33} \end{pmatrix} .$$

$L(B) = 0$ si y sólo si $B = z \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: único estado invariante es el estado puro asociado con el vector $(1, 0, 0)$. Por D) ν_t es equilibrante.

Ejemplo II (fin)

Efectivamente:

$$\nu_t(\rho) = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t) & \rho_{12}e^{-t/2} + 2\rho_{23}(e^{-t/2} - e^{-t}) & \rho_{13}e^{-t/2} \\ c.c & (\rho_{22} + \rho_{33}t)e^{-t} & \rho_{23}e^{-t} \\ c.c & c.c & \rho_{33}e^{-t} \end{pmatrix}$$