FÍSICA MODERNA I

13 de Octubre del 2011.

Guía Nº 7: Oscilador armónico y átomos hidrogenoides.

Problema 1:

Considere una partícula de masa m en un potencial armónico unidimensional de la forma:

$$V(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

a) Muestre que una función del tipo $\psi(x) = C\,e^{-\alpha\,x^2}$ es autofunción de la ecuación de Schrödinger (independiente del tiempo) correspondiente. Calcule los valores de C, α y E. Esta solución corresponde al estado de mínima energía del oscilador armónico unidimensional.

b) Verifique el principio de incerteza para una partícula que se encuentra en este estado de energía.

c) A partir del principio de incerteza estime la energía de punto cero para un oscilador armónico unidimensional y compárela con el valor obtenido en (a).

Problema 2:

Considere una partícula clásica en un potencial armónico unidimensional. Sea A la amplitud de oscilación de la partícula para una dada energía. Muestre que la probabilidad de encontrar la partícula entre x y $x + dx$ es:

$$P(x)\,dx = \frac{dx}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

a) Grafique $P(x)$ y compárela con la probabilidad de encontrar una partícula cuántica entre x y $x + dx$ para el primer estado del oscilador armónico unidimensional.

b) Cuál es la probabilidad de encontrar las partículas clásica y cuántica en alguna parte del intervalo finito $[0, A/2]$?

c) Grafique la densidad de probabilidad para el estado $n = 10$ del oscilador armónico cuántico y compárela con la densidad de probabilidad clásica a la misma energía.

Problema 3:

Considere que la energía potencial de una partícula es de la forma:

$$V(x) = V_0\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right],$$

donde V_0 y x_0 son constantes positivas.

a) Grafique cualitativamente la función $V(x)$ y determine la posición de equilibrio de la partícula. Deduzca la forma de la aproximación armónica para este potencial.

b) Calcule los puntos de retorno para el movimiento clásico. Considere los casos $E < 0$ y $E > 0$, siendo E la energía de la partícula.

c) Estime la energía de punto cero.

Problema 4:

Muestre que para los valores de expectación valen las relaciones $d\langle x\rangle/dt = \langle p\rangle/m$ y $d\langle p\rangle/dt = -\langle dV/dx\rangle$.

Problema 5:

Considere la función de onda $\Psi(x,t) = c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$, donde las funciones ψ_1 y ψ_2 están normalizadas y son ortogonales. Conociendo $\Psi(x,0)$ encuentre los valores de c_1 y c_2.

Problema 6:

Un oscilador armónico está inicialmente en el estado

$$\psi(x,0) = Ae^{-\alpha^2 x^2/2}\alpha x(2\alpha x + i)$$

donde $\alpha^2 = m\omega/\hbar$, m es la masa y ω la frecuencia del oscilador.

a) Encuentre la función de onda para todo $t > 0$.

b) Calcule las probabilidades de obtener los valores $\frac{5}{2}\hbar\omega$ y $\frac{7}{2}\hbar\omega$ para la energía del oscilador como resultado de una medición.

c) Calcule la energía media del oscilador.

Problema 7:

La función de onda (normalizada) correspondiente al estado fundamental del atomo de hidrógeno tiene la forma:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$$

siendo a_0 el radio de Bohr.

a) Grafique la densidad de probabilidad de encontrar al electrón en un cascarón esférico entre r y $r + dr$.

b) Calcule la probabilidad de que un electrón en este estado se encuentre a una distancia mayor que a_0 del núcleo.

c) Calcule la distancia más probable entre el electrón y el núcleo.

d) Calcule $\langle r \rangle$.